Características Matemáticas de las Funciones Económicas

Augusto Rufasto

Sensibilidad y Elasticidad de una Función Económica

A continuación veremos diversas características importantes de una función económica. Para trabajar en forma adecuada los modelos mecánicos de la economía, se requiere hacer uso de funciones económicas bajo su forma matemática. Nos interesarán conceptos como el valor medio, derivada, elasticidad y otros más.

El valor medio

El valor medio corresponde al cálculo del valor prorrateado de una función o output respecto a la cantidad de inputs que permitieron generarla. Luego, el valor medio es obtenido dividiendo el valor alcanzado por la función entre el valor asignado a la variable. Notaremos como $M_{y,x}$ al valor medio de la función y respecto a x, para expresar:

$$M_{y,x} = \frac{y}{x}$$

El valor medio es sólo una expresión descriptiva, pero esta expresión puede ser considerada como si se tratara de una medida de la sensibilidad de la función.

Sensibilidad, impacto, causa-efecto

Por sensibilidad entendemos la intensidad de respuesta de una función respecto a cambios en el valor de una variable. La sensibilidad mide la magnitud de la relación causa-efecto existente entre una variable y una función de ella. Por ejemplo, si el precio de un artículo sube, entonces la cantidad comprada por consumidores decae. La cantidad comprada es "sensible" al precio. De esta forma, un cambio en la variable precio terminará en un cambio en la función "compras totales". Más aún, podemos decir que la sensibilidad de esta función es negativa (sube variable precio y hace caer función compras). La sensibilidad es una característica de la función, y no de la variable.

La influencia de la variable sobre la función es denominada impacto. El impacto es una característica de la variable, y no de la función. La magnitud de la sensibilidad de una función respecto a una variable es igual a la magnitud del impacto de tal variable sobre la función.

La derivada

La derivada es una medida de la sensibilidad de una función cualquiera respecto a una variable de la que depende la función. La derivada es un ratio, es decir, un cociente. El numerador de este ratio es un cambio-efecto en la función que se estudia. El denominador del ratio es un cambio-causa en el variable de la cual depende la función.

Notaremos como $D_{y,x}$ a la derivada de y respecto a x, para expresar:

$$D_{y,x} = \frac{dy}{dx}$$

En este texto, yo prefiero usar la siguiente notación:

$$D_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

La derivada también puede ser considerada como un ratio de "velocidad relativa" de y respecto a x. Volveremos pronto a tocar este tema.

El cambio o variación

Ésta es una medida de cómo experimenta cambios el valor de una determinada variable. Denotamos al cambio como Δ. El cambio de una variable x será denotado Δx. Los cambios muy pequeños son expresados de forma diferente, como dx, donde la letra d actúa como un operador de "cambio diferencial". Un cambio diferencial es un cambio pequeñísimo, cuya magnitud es infinitesimal.

El cambio porcentual

Una medida importante en economía es el cambio porcentual. Denotaremos a éste como Δ%. El cambio porcentual de x será Δ%x. Si decimos que dx es una medida del cambio pequeño, entonces el cambio porcentual pequeño responderá a la forma dx/x. Por análisis matemático, puede decirse que un cambio mporcentual pequeño responde a la siguiente expresión:

$$\Delta\% x = \frac{dx}{x} = d\ln(x)$$

La elasticidad

La elasticidad de una función respecto a una variable es una medida de la sensibilidad de la función, es decir, de su respuesta frente a variaciones en el valor de la variable. La elasticidad se expresa en términos porcentuales. Su fórmula es:

$$\eta_{y,x} = \frac{\partial \ln(y)}{\partial \ln(x)}$$

Una fórmula equivalente para calcular la elasticidad es la siguiente:

$$\eta_{y,x} = \frac{D_{y,x}}{M_{y,x}}$$

Donde $D_{y,x}$ es la derivada de y respecto a x y $M_{y,x}$ es el valor medio de la función y respecto a x.

$$M_{y,x} = \frac{y}{x}$$

La importancia de la elasticidad se encuentra en el campo de las predicciones. Cuando una variable cambia en cierto porcentaje pequeño, la función lo hará en otro porcentaje, y éste puede ser predicho usando la siguiente expresión:

$$\Delta\% y \cong \eta_{y,x} \cdot \Delta\% x$$

Es decir que el porcentaje en que cambia la función es aproximadamente igual a la multiplicación de la elasticidad por el porcentaje en que cambia la variable.

Magnitudes de la elasticidad

La elasticidad de una función puede tomar diversos valores. En realidad, lo que nos interesará más frecuentemente será el valor absoluto de la elasticidad, sin importar que la elasticidad sea positiva o negativa. A continuación, exponemos los valores más importantes:

- $\eta>0$. La sensibilidad es positiva. Por ello, un aumento en el valor de la variable genera un aumento en el valor de la función.
- $\eta<0$. La sensibilidad es negativa. Un aumento en el valor de la variable genera un aumento en el valor de la función.
- $\eta=0$. A una función con esta elasticidad se le considera "perfectamente inelástica". Un cambio en la variable no genera ninguna respuesta en la función.
- $|\eta|=1$. En este caso, se dice que la función tiene elasticidad unitaria. Aquí, el porcentaje en que varía la función es igual al procentaje en que varía la variable.
- $|\eta|$ entre 0 y 1. En este caso, se dice que la función es inelástica. El porcentaje en que cambia la función es menor que aquél en que cambia la variable.
- $|\eta|>1$. En este caso, la función es considerada elástica. El porcentaje en que cambia la función es mayor que aquél en que cambia la variable.
- $|\eta|$ con tendencia a infinito. A una función con esta elasticidad se le considera perfectamente elástica. Cualquier cambio por diminuto que fuera en la variable tiende a generar altísmos (y teóricamente infinitos) cambios en la función.

Primer ejemplo de aplicación: análisis gráfico de la elasticidad desempeño respecto a inversión

Veamos ahora nuestro primer ejemplo. Si en una economía la inversión en educación (medida por X) tuviera un efecto sobre el potencial económico nacional (medido por V(X) de acuerdo a la fórmula:

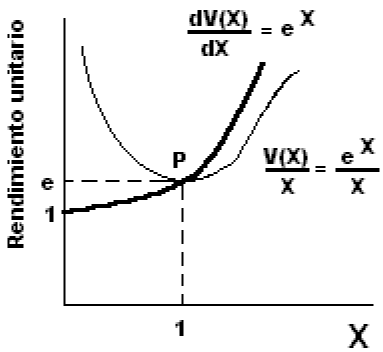
$$V = V(X) = e^X$$

Se pide hallar las condiciones bajo las que la elasticidad de V(X) respecto a X (es decir, $\eta_{V(X),X}$) pueda ser mayor que 1. Nos interesa saber en qué zona el potencial económico nacional es una función elástica respecto a la inversión nacional. Adicionalmente, podemos buscar las condiciones bajo las cuales el potencial económico nacional es una función inelástica respecto a la inversión. En estos casos, aumentar la inversión tiene un efecto minimizado sobre el incremento del potencial económico nacional.

Primero construiremos el desempeño promedio y el desempeño marginal:

$$\frac{V(X)}{X} = \frac{e^X}{X} \qquad \frac{\partial V(X)}{\partial X} = e^X$$

El gráfico correspondiente:



Como la δV(X)/δX y V(X)/X son positivos, entonces la condición buscada (elasticidad mayor a 1) es equivalente a decir que

$$\frac{\partial V(X)}{\partial X} > \frac{V(X)}{X}$$

La intersección de las dos curvas se da en el punto P del gráfico. La condición se cumple a la derecha del punto P, es decir, cuando X>1. La zona X>1 es la que produce un desempeño elástico. Esto se interpreta de la siguiente forma: si el monto de inversión es mayor a 1, entonces el desempeño es una función elástica de la inversión. Si la inversión aumenta en 1%, el desempeño aumentará en más de 1%. Pero si el monto de inversión es menor a 1 (zona X<1), entonces el desempeño es inelástico. En este caso, un aumento de la inversión del 1% tendrá un efecto sobre el desempeño en un incremento positivo pero menor que 1%.

¿Cómo se traduce este análisis en una situación más empírica? J. Ferreyros, consultor principal en inversión de la oficina nacional de proyectos, desea saber en qué región un incremento de 1% en desembolso para inversión genera una respuesta en aumento del potencial económico mayor que 1% (p.e., 2%). Esto sucede en la zona X>1. Dice entonces el consultor “aquí es muy conveniente invertir *más*, ya que la elasticidad de respuesta del desempeño de la inversión es alta”.

Luego Ferreyros se pregunta “¿qué sucede en la zona X<1?”. Tras el análisis, su respuesta es “en la zona X<1 no es tan conveniente aumentar la inversión *como sí lo es invertir más en la zona X>1*”. ¿Por qué? Simplemente porque un incremento de inversión de 1% produce menos que 1% de respuesta (p.e., 0.8%) en aumento del desempeño alcanzable. Más aun, si la inversión cayera en 1%, el desempeño caería en menos que 1% (p.e., en 0.8%). El impacto de una reducción de la inversión no es tan fuerte en esta zona como en la zona X>1.

Si la inversión cae exactamente en el punto X=1, no hay sugerencias respecto a invertir más o menos. La elasticidad unitaria indica que da lo mismo si se aumenta o dismunuye el nivel de inversión. Si Ferreyros decide aumentar la inversión, luego repetirá su acción, ya que entonces la inversión rinde en forma sobre-proporcional. Y si decide reducir la inversión, descubrirá que el aumento rinde en forma infraproporcional. No se sabe si se sentirá motivado a aumentar la inversión. Pero si redujera su inversión, el desempeño se reduciría en un valor menos que proporcional. Por todo esto, el punto X=1 puede ser considerado un punto inestable.

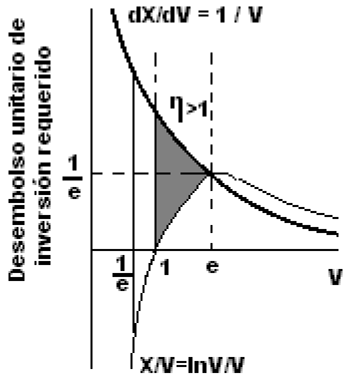
Segundo ejemplo de aplicación: análisis gráfico de la elasticidad egreso de inversión respecto al objetivo deseado

Ahora veamos otro caso parecido. Trataremos de hallar las condiciones bajo las cuales la elasticidad del monto de inversión requerido (X) respecto al desempeño deseado (V) es mayor que 1. Nuestra motivación para encontrar esas condiciones corresponde a nuestra necesidad de saber dónde es que el egreso de inversión (X) se incrementa proporcionalmente más rápidamente que el la utilidad de esta inversión (V). Luego de reconocer estas condiciones, sabremos bajo qué condiciones un incremento porcentual en el objetivo V, “potencial económico nacional”, requiere un incremento porcentual más-que-proporcional en el egreso de inversión requerido X..

Como X=lnV, las funciones de egreso unitario de inversión son:

$$\frac{X}{V} = \frac{\ln V}{V} \qquad \frac{\partial X}{\partial V} = \frac{1}{V}$$

El gráfico correspondiente:



La zona sombreada, el triángulo que va desdeV=1 hasta V=e, es la zona con una elasticidad mayor que 1 (zona elástica positiva). En estos casos, un aumento en nuestras exigencias de desempeño (potencial económico nacional) implican un aumento más que proporcional de los costos de inversión.

Si el desempeño deseado (objetivos en potencial económico nacional V) es superior a e, entonces la elasticidad es menor que 1 (zona inelástica positiva). En estos casos, un aumento en las exigencias de desempeño implican un aumento porcentual menos que proporcional en los egresos requeridos de inversión.

Si estos objetivos son inferiores a 1, entonces la elasticidad es negativa. En la zona negativa encontramos dos regiones. Si V va desde e^{-1} (e^{-1}=0.3679) hasta 1, el costo es elástico negativo. Ello significa que un incremento pequeño en el objetivo V reduce bastante el valor del costo. Si V va desde 0 hasta 0.3679, entonces el costo es inelástico negativo. En este caso, un incremento del objetivo V genera una reducción del costo, pero infra-proporcional al valor absoluto del incremento porcentual de V.

Veamos qué sucede con J. Ferreyros, nuestro consultor de inversión. Ahora él desea saber cómo son los efectos de un incremento porcentual de 1% en el objetivo de desempeño de la inversión sobre el incremento porcentual de los costos. Tras su análisis, tabula lo que nosotros ya conocemos. Los puntos críticos de V son 0.3679, 1 y 2,7183:

- Si X es menor que 0.3679, entonces el costo disminuye con una elasticidad mayor a 1. Al aumentar la exigencia de desempeño V, se reduce el costo. No obstante, la reducción de costo es menor en proporción que el aumento del desempeño establecido.
- Si pertenece al intervalo 0.3679 hasta 1, la elasticidad es mayor que 1 en valor absoluto (por ejemplo, la elasticidad para V=0.5 es –1.4427). Incrementar la exigencia de desempeño V conlleva una reducción más que proporcional en los egresos de inversión.
- Si V es superior a 1, pero menor que e, se presentan algunos problemas. Ahora la elasticidad es positiva. Por lo tanto, un incremento en el objetivo de desempeño V generará un aumento en los egresos de inversión. Más aun, el incremento es sobre-proporcional al aumento del desempeño objetivo. Ferreyros se dice que en esta zona el aumento del objetivo de desempeño es más costoso que en otras zonas. Es plausible que Ferreyros no se sienta motivado a aumentar el valor de su objetivo de desempeño.

- Pero si V llegara a superar el valor e (2.7183), entonces se alcanzará la zona en que los egresos de inversión son más lentos que los aumentos en desempeño. Si J. Ferreyros llega a ubicarse en esta zona, lo más probable será que termine por interesarse en exigirse desempeños más fuertes, ya que la inversión requerida por el desempeño aumenta con lentitud.

Por lo analizado, puede decirse que el punto V=e es un punto inestable. A la derecha de ese punto, el desempeño es más rápido que la inversión. Pero a la izquierda de V el desempeño es lento en comparación con la inversión. Si se redujera la inversión en 1%, el desempeño se reduciría en menos que 1%.

Velocidad, velocidad relativa y la relación de ésta con la derivada

Algunas variables económicas son en realidad funciones del tiempo. En este caso, si x e y dependen del tiempo, podemos escribir: x=x(t) e y=y(t). Cuando un valor depende del tiempo, puede ser calculada su velocidad de cambio. La velocidad mide el cambio de una variable respecto al tiempo. Por lo tanto, es expresada como una derivada: es la derivada de una magnitud respecto al tiempo. Las velocidades de x e y son:

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} \qquad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

La velocidad también tiene otra notación. La velocidad de x puede ser expresada como "x punto (x°)". Así, tendríamos

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y}$$

Una velocidad muy alta indica que el valor cambia rápidamente. Ahora construyamos el ratio de velocidad relativa, al que denotaremos como $v_{y,x}$:

$$v_{y,x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}}$$

Bajo ciertas condiciones especiales, este ratio toma la forma:

$$v_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

La velocidad relativa $v_{y,x}$ indica qué tan rápido varía y respecto a x. Si $v_{y,x}$ fuera igual a 10, ello signficaría que y cambia diez veces más rápido que x. Vemos que el ratio de velocidad relativa de y respecto a x tiene la misma forma que la derivada de y respecto a x, es decir:

$$v_{y,x} = D_{y,x}$$

De esta forma, cuando hablemos de una derivada, también podremos hablar de un ratio de velocidad relativa, o simplemente de una velocidad relativa. Ver a la derivada como una velocidad relativa es útil, ya que permite enfocar la naturaleza temporal o dinámica de los procesos económicos. A manera de ejemplo, expongamos el caso de la derivada de los precios respecto a la cantidad producida de un artículo en la perspectiva de los productores. Si esta derivada tiene un valor alto, entonces puede afirmarse que un cambio de baja magnitud en el nivel de producción tiene como efecto un cambio de alta magnitud en los precios determinados por las empresas. Pero también podría decirse que los precios crecen o decrecen más velozmente que el nivel de producción.

La elasticidad puede ser vista también como un ratio de velocidad relativa, sólo que en este caso debe uno referirse al cociente de las velocidades de los valores logarítmicos (llamémoslas “velocidades logarítmicas”) de y y x:

$$\eta_{y,x} = v_{\ln y,\ln x} = \frac{v_{\ln y}}{v_{\ln x}} = \frac{\dfrac{\partial \ln(y)}{\partial t}}{\dfrac{\partial \ln(x)}{\partial t}} = \frac{\partial \ln(y)}{\partial \ln(x)}$$

Por lo expuesto, la elasticidad puede ser expresada como el ratio de las velocidades logarítmicas de y y x.

Rendimiento unitario del input y costo unitario de producción del output en una función de producción X=Q(L)

Respecto a una función matemática de producción **X=Q(L)** podemos estudiar caracteríssticas importantes, como sus valores unitarios de rendimiento y de costo.

El rendimiento unitario de un input es igual a su capacidad de generar output. Existen dos medidas del rendimiento unitario del input: el rendimiento unitario promedio del input y el rendimiento unitario marginal del input

Rendimiento unitario promedio del input

Para hallar el rendimiento unitario promedio, calculamos el cociente o ratio X/L. Este cociente es igual a un valor prorrateado de todo el valor de output (X) entre todo el valor de input (L). El input está constituido por los insumos y/o factores que participan en la generación de output o producto terminado. El rendimiento promedio es una medida que promedia el valor del output entre el valor del input. Este rendimiento es referencial.

Rendimiento unitario marginal del input

Es el rendimiento unitario calculado de acuerdo al prorrateo de un diferencial de output (dX) entre el diferencial de input que lo generó (dL). El rendimiento unitario marginal, por lo dicho, es igual a la derivada del valor del output respecto al valor del input, es decir que es igual a $\delta X/\delta L$. El rendimiento marginal es una medida que identifica el rendimiento aislado de cada *quantum* (porción de magnitud infitesimal) o porción diferencial de input.

Sobre el costo de producción

El costo de producción de un artículo puede ser medido de formas diversas. Destacan dos formas de medir el costo de producción. La primera de ellas será denominada la forma simple de medir el costo. La forma simple de medir el costo es decir que el costo de producción viene dado por la función de requerimientos L=R(X), la que corresponde a la inversa de la función de producción ($R(X)=Q^{-1}(X)$, donde X=Q(L)).

La segunda forma es la más común de medir el costo, y corresponde a la función de costo de producción. La función de costo de producción viene dada por $C(X)=w\times R(X)$, o sea por $C(X)=w\times L$. El valor w corresponde al precio unitario de los factores o insumos utilizados para la producción. De esta forma, C(X) es un valor medido en unidades de dinero (dólares, por ejemplo).

En este documento nos ocuparemos de analizar el costo representado por R(X) y no por C(X).

Costo unitario promedio del output

Para hallar el costo unitario promedio, calculamos el cociente o ratio L/X. Este cociente es igual a un valor prorrateado de todo el valor de input (L) entre todo el valor de output (X). El costo promedio es una medida que promedia el valor del input entre el valor del input. Este costo es referencial.

Costo unitario marginal del output

Es el costo unitario calculado de acuerdo al prorrateo de un diferencial de input requerido (dL) entre el diferencial de output que este genera (dX). El costo unitario marginal, por lo dicho, es igual a la derivada del valor del input respecto al valor del output, es decir que es igual a $\delta L/\delta X$. El costo marginal es una medida que identifica el costo aislado de cada *quantum* (porción de magnitud infitesimal) o porción diferencial de output.

Ejemplo de análisis

Un equipo dedicado al desarrollo de tecnologías de generación de energía debe invertir dinero (input = dólares) en un proceso de desarrollo de mediano plazo que permitirá obtener energía (output = joules) de acuerdo a una función como:

$$X = e^L$$

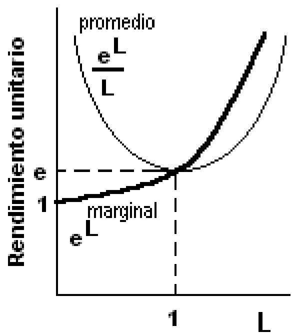
Graficar las curvas de rendimiento unitario promedio (X/L) y marginal (δX/δL) del input (dólares) en este proceso tecnológico. Graficar también las curvas de costo unitario promedio (L/X) y marginal (δL/δX) para la obtención de output (joules).

Solución: las funciones de rendimiento unitario son:

$$\frac{X}{L} = \frac{e^L}{L}$$

$$\frac{\partial X}{\partial L} = e^L$$

El gráfico correspondiente:

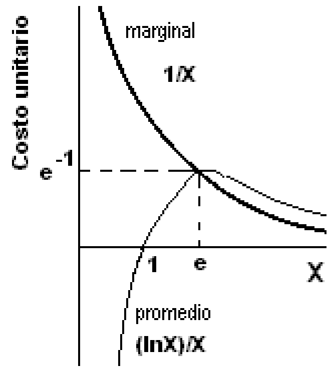


Como L = R(X) = lnX, las funciones de costo unitario son:

$$\frac{L}{X} = \frac{\ln X}{X}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{1}{X}$$

El gráfico correspondiente:


Costo unitario
marginal
1/X
e-1
1
e
X
promedio
(lnX)/X