Análisis Matemático en la Economía: Optimización y Programación

Augusto Rufasto

arufast@yahoo.com-rufasto@lycos.com

www.geocities.com/arufast-http://rufasto.tripod.com

La optimización y la programación están en el corazón del problema económico. Éstas se ocupan de los procesos que producen elementos deseables al mismo tiempo que los costos que están asociados a ellos. En este capítulo veremos cómo es que operan la programación matemática y la optimización para plantear y resolver los problemas teóricos de economía. También conoceremos otras herramientas de análisis matemático aplicables al análisis económico.

Optimización y programación matemática

Los problemas en economía pueden ser formalizados como problemas de optimización y programación matemática. La optimización consiste en la búsqueda de valores adecuados para una variable y una función, donde la función representa un objetivo de nuestro interés. Recibe el nombre de optimización en razón de que "óptimo", palabra proveniente del latín, significa "lo mejor". El óptimo es el grado superlativo de cualquier magnitud. Si nuestro objetivo es buscar el más alto nivel de beneficios, entonces es que buscamos el beneficio óptimo. Y si buscamos el menor de los costos, estamos buscando el costo óptimo.

La programación matemática da forma a la optimización. La programación matemática consiste en en una serie de tareas de análisis matemático, todas ellas focalizadas en un objetivo cuantificado y especial. Como ejemplo, veamos el siguiente problema:

$\max \; \Lambda(X)$ [función objetivo]

s.a:

$R(X) \leq T$ [restricción]

Se trata de hallar un valor óptimo para la función $\Lambda(X)$. La programación mostrada está focalizada en la búsqueda del mayor valor posible para una función $\Lambda(X)$. Esta función recibe el nombre de "función objetivo", ya que el objetivo es encontrar un valor para esta función. X representa el nivel de actividad económica y es también la variable de la cual depende la función $\Lambda(X)$, y recibe en teoría de optimización y programación el nombre de "variable de decisión", ya que el proceso de programación finaliza cuando se ha tomado una decisión sobre cuál es el valor más adecuado de X. El programador matemático debe probar diferentes valores de X por medio de diversos procedimientos y técnicas. Luego de probar los valores de X, puede decirse cuál es el valor de X que da máximo valor para la función $\Lambda(X)$.

Vemos que la programación también incluye un renglón de restricción. La función R(X) expresa el costo económico de conseguir un nivel de actividad económica como X. Por otro lado, T representa una cantidad de recursos disponibles y explotables. Se dispone así de una cantidad T de recursos primos o brutos. De esa forma, no puede explotarse o transformarse una cantidad de recursos superior a T. El renglón de restricción describe la situación del problema económico de que el nivel del costo incurrido R(X) no puede sobrepasar la disponibilidad total de recursos T.

La economía como un problema de programación matemática

Una síntesis del problema económico incluye siempre la cuestión de la optimización, la directriz de deseo y necesidad, las relaciones de transformación de los recursos, la disponibilidad de éstos y el papel jugado por el dinero. En forma sencilla, podemos expresar el problema económico central como:

$$\max \ \Lambda(X) = V(X) - \rho \cdot R(X)$$
s.a:
$$R(X) \leq T$$

Donde:

- Λ(X): Efecto positivo neto total generado por el bien.
- X: Cantidad de bienes creada por la economía.
- V(X): Efecto positivo bruto total generado por los bienes.
- R(X): Costo total de transformación.
- ρ: Factor de conversión de unidades de costo a unidades de medición del efecto positivo.
- T: Disponibilidad total de recursos de la economía.

Λ(X) es la función a la que deseamos dar un valor óptimo, que en este caso es, además, un valor, máximo. Esta función será llamada "función de desempeño económico neto". V(X) es la función de desempeño, y puede representar, en el caso de una economía nacional, el bienestar que el sistema económico genera para toda la sociedad. X representa la cantidad de todos los productos que la economía elaborará u obtendrá. R(X) es una función que calcula los requerimientos en recursos necesarios para la obtención de X. T muestra la disponibilidad total de recursos brutos.

ρ es un elemento matemático extremafdamente importante. En este enfoque, ρ es un factor de conversión. ¿Por qué se requiere un factor de conversión? La razón es la siguiente: Los costos R(X) están expresados en una unidad de medida de costos. Démosle una denominación a la unidad de medida de los costos, como"horas-factor". Por otro lado, la función de desempeño V(X) indica el grado de bienestar bruto alcanzado, y su unidad de medida es generalmente distinta a la de los costos de la actividad. Digamos que V(X) se mide en "bonos" o "útiles".

La economía mostrada formalmente en la programación elevará el bienestar de la sociedad, decidiendo el valor más adecuado del volumen de producción.

Los dos procesos de transformación

En el ejemplo anterior hemos visto que la programación se centra en encontrar un valor adecuado para la variable de decisión, en orden de que este valor se transforme, vía las funciones V(X) y R(X), en el valor deseado para la función Λ(X), la que representa el bienestar neto en una econompia nacional. Profundizaremos sobre las funciones V(X) y R(X), ya que éstas definen a la función Λ(X), y así definen también a la economía.

Imaginemos un proceso que comporte producción de bienes para satisfacer la necesidad de las personas. Estaríamos hablando de dos procesos de transformación: En el primero, se convierte material bruto en artículos (lo llamaremos proceso Q). En el segundo, se convierte artículos o bienes terminados en satisfacción (lo llamaremos proceso V).

Proceso Q

Éste es el primer proceso de la cadena de transformación en la economía. Se toma elementos en estado bruto y se les refina hasta transformárseles en artículos acabados.

$$X = Q(L)$$

- L: Vector de recursos brutos llevados al proceso de transformación.
- X: Vector de bienes finales obtenidos.
- Q: Función matemática que representa al proceso de transformación.

Veremos más adelante que R(X) corresponde a la función Q^{-1}. Así, $R(X)=Q^{-1}(X)$.

Proceso V

Éste es el segundo proceso de la cadena de transformación en la economía. Se toma los bienes terminados y se les utiliza o consume hasta transformárseles en bienestar.

$$U = V(X)$$

- X: Vector de bienes finales consumidos o usados.
- U: Medida de la satisfacción final obtenida.
- V: Función matemática que representa al proceso de obtención de bienestar mediante el consumo y uso de los bienes.

Las funciones de transformación

En el análisis económico nos interesa transformar ciertos valores en otros. Como ya se vio, los procesos de transformación que se usarán son dos: El proceso Q y el proceso V.

Operatividad de Q

Q transforma recursos brutos de la economía en bienes susceptibles de ser consumidos. Como ya se vio, responde a la siguiente expresión:

$$X = Q(L)$$

Los bienes producidos X se miden en "unidades de producto final" (o, mejor aún, en "canastas", ya que pueden se produce bienes de diversos tipos, y no una sola clase de bien). Los recursos usados L se miden en "horas-factor". Tanto X como L son vectores. Así, el output X es un vector de *n* componentes, ya que está conformado por los bienes producidos de *n* tipos distintos. El input L es un vector de *m* componentes, ya que está conformado por los recursos brutos de *m* tipos diferentes.

La actividad de planeación de la producción lleva a plantear metas productivas y a evaluar los requerimientos de recursos necesarios. Así, si X mide la meta de producción y L el nivel de los requerimientos, usaremos la siguiente expresión para determinar el valor de L:

$$L = Q^{-1}(X)$$

Q^{-1} será la función de requerimientos productivos necesarios para conseguir *X* de producción final. Q^{-1} será denotado como R. Así, tenemos:

$$L = R(X)$$

La expresión mostrada nos ayudará a formular diversos problemas económicos usando como referencia a X. R(X) se mide en unidades de costo de producción, que pueden ser dólares (si hablamos de dinero), u horas-factor (si hablamos de la inversión de tiempo requerida para producir el monto X).

Operatividad de V

V transforma los bienes consumidos en satisfacción. Mediremos a la satisfacción en "unidades de satisfacción" o "unidades de bienestar". Será necesario dar un nombre a tales unidades, y las llamaremos "bonos" o "útiles". Cualesquiera bienes consumidos en esta economía se transformarán, por efecto del proceso de consumo en bonos. Recordemos la expresión correspondiente a V:

$$U = V(X)$$

U estará medido en bonos o útiles, y su magnitud reflejará el grado de satisfacción de un individuo.

Estructuras funcionales que representan los procesos de transformación

Para el análisis de los dos procesos de transformación haremos uso de diversas estructuras funcionales. Las funciones que presentaremos transformarán un vector x en una magnitud y, usando una función $f(x)$:

$$y = f(x)$$

Es decir, x representará el input e y el output.

Una característica muy importante de las estructuras funcionales es el ratio o cociente entre los requerimientos de input y de output necesarios para producir una unidad de output. Este ratio puede ser constante o variable. Si se trata de un ratio constante, esto es descrito como una situación de complementariedad absoluta o perfecta entre los elementos de input. Esto quiere decir que una unidad de output sólo puede ser conseguida mediante una única combinación de undades input. Si se trata de un ratio variable, los elementos de input son sustitubles entre sí. Esto significa que distintas combinaciones de elementos input pueden producir una unidad de output.

Estructura Cobb-Douglas con decreciente velocidad de crecimiento

La siguiente es una función con estructura Cobb-Douglas:

$$y = \prod_{i=1}^{i=n} x_i^{a_i}$$

Una función Cobb-Douglas con decreciente velocidad de crecimiento, por otro lado, incorpora las siguientes condiciones:

$$y = \prod_{i=1}^{i=n} x_i^{a_i}$$
$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, a_i \in \left]0,1\right[$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \in \left]0,1\right[$$

Definimos la variable s_j, a la que llamaremos "importancia" o "peso" en la función del componente j de la siguiente manera:

$$s_j = \frac{a_j}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i}$$

La importancia representa el grado de influencia que tiene el j-ésimo componente de un conjunto de n componentes que son inputs para una función de tipo Cobb-Douglas. La importancia o peso de un compnente sobre un grupo de componentes sólo puede alcanzar valores que estén entre 0 y 1, o sea entre 0% y 100%:

$$s_j \in \left]0,1\right[$$

La suma de todas las importancias es igual a la unidad:

$$\sum_{i=1}^{i=n} s_i = 1 = 100\%$$

El concepto de importancia o peso puede aparecer en contextos que incluyan a funciones diferentes de la Cobb-Douglas, pero he encontrado que es muy útil en el análisis de problemas referidos a funciones Cobb-Douglas. El concepto de peso o importancia ayudará a formular conclusiones importantes en la teoría del consumidor.

Estructura Leontieff

La siguiente es una función con estructura Leontieff:

$$y = \min\{a_1 \times x_1, a_2 \times x_2, \ldots, a_i \times x_i, \ldots a_n \times x_n\}$$

La siguiente regla permite optimizar muchos casos de análisis relativos a una función Leontieff:

$$y = a_1 \cdot x_1 = a_2 \cdot x_2 = \ldots = a_j \cdot x_j = \ldots = a_n \cdot x_n$$

Tal regla será denominada "regla de cero excedentes", ya que permite que todos los componentes se establezcan en valores que coinciden en que todos son iguales al valor de referencia, el mínimo.

Estructura lineal en los componentes del vector

Una función con estructura lineal en los componentes del vector responde a la siguiente expresión:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \times x_i$$

El valor del ratio de requerimientos input responde a un tratamiento particular del problema de optimización.

El factor de conversión ρ

El factor de conversión ρ participa en la función de valor neto de desempeño, Λ(X), que define al problema de una unidad económica. El problema original es:

$$\begin{aligned}&\max\ V(X)\\ &\text{s.a:}\\ &R(X)\leq T\end{aligned}$$

Y transformamos este problema a:

$$\begin{aligned}&\max\ \Lambda(X)=V(X)-\rho\cdot R(X)\\ &\text{s.a:}\\ &R(X)\leq T\end{aligned}$$

Donde:

- Λ(X): Desempeño neto generado por la actividad, en nivel X.
- X: Nivel de actividad.
- V(X): Desempeño bruto generado por la actividad, en nivel X.
- R(X): Costo del nivel de actividad X.
- ρ: Factor de conversión de unidades de costo a unidades de desempeño.
- T: Disponibilidad total de recursos de la unidad económica.

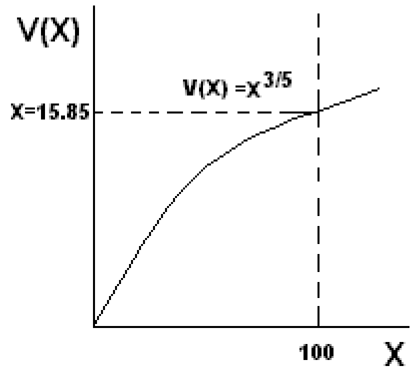
En este análisis, nos ocuparemos de estudiar a ρ. Aparte de haber sido introducido y definido como un factor de conversión, nos interesa conocer la **estructura, funcionalidad y significado de ρ**.

Dos ejemplos de análisis: el primer ejemplo

Veamos dos ejemplos para análisis de optimización. En primer lugar, tenemos una unidad económica cuyo desempeño corresponde a $X^{3/5}$ Si el costo de llegar a X viene dado por R(X) = X, y sólo se dispone de un total de 100 unidades de recursos, podemos expresar este problema como:

$$\begin{aligned}&\max V(X)=X^{\frac{3}{5}}\\ &\text{s.a.:}\\ &R(X)=X\leq 100\end{aligned}$$

Veamos gráficamente el problema:



La solución del problema económico es hacer uso de las 100 unidades de recursos. Esto permite llegar a un nivel de actividad X igual a 100 y generar un desempeño tal como 15.85.

También podemos expresar el problema como:

$$\max \Lambda(X) = X^{\frac{3}{5}} - \rho \cdot X$$

s.a.:

$$R(X) = X \leq 100$$

El operador Λ(X) ahora incluye el desempeño bruto V(X) y el costo de operación relativo a X, es decir, R(X). Si buscamos un valor crítico para Λ(X), derivamos Λ(X) e igualamos ello a cero:

$$\frac{\partial \Lambda(X)}{\partial X} = \frac{\partial V(X)}{\partial X} - \rho \cdot \frac{\partial R(X)}{\partial X} = 0$$

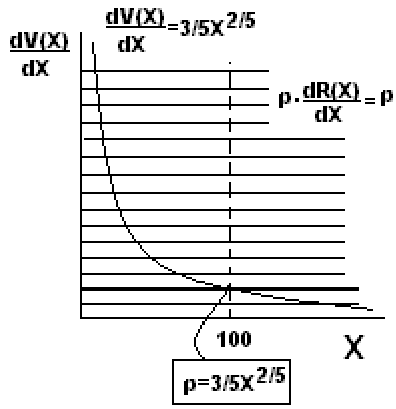
Esto equivale a:

$$\frac{\partial V(X)}{\partial X} = \rho \cdot \frac{\partial R(X)}{\partial X}$$

Las funciones dan forma a esta ecuación. $\delta V(X)/\delta X$ es igual a $3/(5X^{3/5})$, mientras que $\delta R(X)/\delta X$ es igual a 1. Tenemos así:

$$\frac{3}{5X^{\frac{2}{5}}} = \rho$$

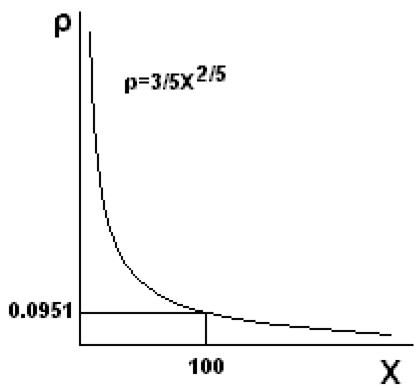
Gráficamente:



La estructura de ρ para este primer ejemplo

El tratamiento algebraico servirá para conocer la estructura de ρ. Esta expresión nos ayudará a encontrar la estructura de ρ:

$$\rho = \frac{\frac{\partial V(X)}{\partial X}}{\frac{\partial R(X)}{\partial X}} = \frac{3}{5X^{\frac{2}{5}}}$$



Esta estructura indica que ρ tiende a disminuir a medida que aumenta el valor de X.

El significado y funcionalidad de ρ

El valor ρ es un ratio construido como el cociente entre una calificación positiva al rendimiento marginal de la actividad relativo al desempeño (es el numerador δV(X)/δX) y una calificación negativa al costo marginal de la actividad (es el denominador δR(X)/δX). Recordemos la forma de ρ:

$$\rho = \frac{\frac{\partial V(X)}{\partial X}}{\frac{\partial R(X)}{\partial X}}$$

Queda muy claro que la ρ es una nota que debe recibir el n ivel de actividad X. Una buena nota implica buen rendimiento marginal para el desempeño y bajo costo marginal de la actividad.

El valor ρ ha sido introducido como factor de conversión. Las unidades de medida de ρ pueden ser vistas en la siguiente forma de expresar ρ:

$$\rho = K\,\frac{grados - desempeño}{unidad - \cos to}$$

El valor ρ tiene otro significado especial: ρ es igual a la capacidad de una unidad de costo de generar un desempeño positivo y deseable.

A manera de ejemplo, en el problema del consumidor ρ es igual a la capacidad de un dólar de generar satisfacción (la que está especificada por la función de utilidad U(X)). Si nuestro primer ejemplo fuera un problema del consumidor, habríamos encontrado que la capacidad de generar satisfacción de un dólar es igual a 0.0951 grados de satisfacción por cada dólar.

De forma inversa, el valor ρ^{-1} será igual al costo en dólares de alcanzar un grado de satisfacción. Alcanzar un grado de satisfacción en este caso es igual a 10.52 dólares por grado de satisfacción.

Pero lo más importante relativo a ρ es su **funcionalidad**, la que se manifiesta en tener ρ una **cualidad de instrumento de asignación económica**. Mediante la introducción de ρ podemos resolver problemas de asignación económica de recursos y/o de actividades. Diversos problemas de asignación podrán ser resueltos sólo gracias a la utilización de ρ. Tal es el caso de nuestro segundo ejemplo de análisis.

El segundo ejemplo de análisis

Una unidad de gestión proyectos debe decidir la mezcla de inversión, la que considera X_1 proyectos de infraestructura con gasto total X_1 y X_2 proyectos de capacitación con gasto total $2X_2$. Si se dispone de 100 millones de dólares para ello y la función de desmpeño de la mezcla de inversión es conocida y tiene la forma $V(X_1,X_2)$, encuéntrese la mezcla de inversión que optimiza el desempeño de la unidad de proyectos, así como la mezcla de gastos en inversión. Como datos tenemos a V(X) y R(X):

$$V(X_1, X_2) = X_1^{\frac{3}{5}} \times X_2^{\frac{1}{5}}$$
$$R(X_1, X_2) = X_1 + 2X_2$$

Como esta unidad económica dispone de 100 millones de dólares, su problema toma la forma:

$$\max X_1^{\frac{3}{5}} \times X_2^{\frac{1}{5}}$$
s.a.:
$$X_1 + 2X_2 \leq 100$$

Plantearemos las ecuaciones para determinación de ρ. Éstas son:

$$\rho = \frac{\dfrac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial R(X_1, X_2)}{\partial X_1}} = \frac{3X_2^{\frac{1}{5}}}{5X_1^{\frac{2}{5}}}$$

$$\rho = \frac{\dfrac{\partial V(X_1, X_2)}{\partial X_2}}{\dfrac{\partial R(X_1, X_2)}{\partial X_2}} = \frac{X_1^{\frac{3}{5}}}{5X_2^{\frac{4}{5}} \times 2}$$

Estas dos ecuaciones son independientes y sólo pueden ser construidas gracias a la presencia del elemento ρ. Los lados derechos de las dos ecuaciones pueden ser igualados:

$$\frac{3X_2^{\frac{1}{5}}}{5X_1^{\frac{2}{5}}} = \frac{X_1^{\frac{3}{5}}}{10X_2^{\frac{4}{5}}}$$

De donde surge una importante relación que servirá para dar forma a la mezcla de inversión:

$$X_2 = \frac{X_1}{6}$$

De acuerdo a esta relación, la mezcla óptima dedica a la capacitación 1/6 de la actividad dedicada a la infraestructura. Por el lado de los costos, $R_2(X_2)$ es $2X_2$, mientras que $R_1(X_1)$ es igual a X_1. Así, la relación entre los costos es la siguiente:

$$R_2(X_2) = \frac{R_1(X_1)}{3}$$

Los costos por la mezcla de inversión pueden ser en total 100 millones de dólares.

$$R_1(X_1) + R_2(X_2) = 100$$

El gasto en invertir en infraestructura resulta siendo 75 millones de dólares, mientras que el gasto en invertir en capacitación termina siendo 25 millones de dólares. Hemos llegado finalmente a la solución del problema de asignación que tenía esta unidad económica dedicada a los proyectos de inversión. Este análisis sólo ha podido ser llevado a cabo mediante la **inclusión de ρ y de su definición algebraica**.

La asignación de n actividades

Cuando la unidad económica debe resolver un problema de asignación de n actividades, puede formular n ecuaciones del tipo:

$$\rho = \frac{\frac{\partial V(X)}{\partial X_i}}{\frac{\partial R(X)}{\partial X_i}}$$