Programación Dinámica de las Finanzas y Mercados de Seguros

Augusto Rufasto
arufast@yahoo.com-rufasto@lycos.com
www.geocities.com/arufast-http://rufasto.tripod.com

En este capítulo presentamos los elementos básicos para el análisis teórico del mercado de fondos financieros. Haciendo uso de los modelos básicos de consumo, es posible construir un sistema de programación de consumos y de ahorros. Concretamente, el modelo se sostiene en la conceptualización de un individuo que recibirá dinero en diversas fechas futuras de acuerdo a un programa establecido. El ahorro en un período determinado es generado de acuerdo a un sistema de programación. La idea es permitir que los fondos financieros fluyan entre los diversos períodos de consumo, relocalizándose en los momentos en que ellos pudieran ofrecer mayor nivel de bienestar total. Por ejemplo, si un individuo recibe hoy 200 dólares y sólo recibirá 50 el mes que viene, el modelo dice que esta persona deberá realizar un ahorro, en orden de relocalizar una parte de sus 200 de hoy en el momento futuro. El modelo de ahorro-crédito arroja un monto específico de ahorro o crédito para cada período de actividad económica. Veremos también un modelo de inversión, en el cual se determina el monto a invertir según la rentabilidad de un proyecto de negocios. Posteriormente veremos un modelo de mercado de seguros. El modelo de seguros presenta como resultado el monto monetario de la prima de seguros.

La función dinámica de utilidad

Hemos visto como un individuo hace uso de diversos procedimientos de optimización para encontrar una relación de consumo óptimo y gasto óptimo en bienes. Veamos ahora una extensión del concepto de la función de utilidad: la función dinámica de utilidad o "utilidad dinámica", $U_{dyn}(S_X)$. Para una primera aproximación, usaremos una utilidad dinámica con estructura Cobb-Douglas. S_X representa ahora una serie de consumos de un único bien, denominado "X". S_X también es la "trayectoria dinámica del consumo de artículos", y es expresada así:

$$S_X = \{X_1, X_2, ..., X_t, ..., X_Z\}$$

X_t representa el consumo de bienes en una fecha *t*. S_I es la trayectoria dinámica de los ingresos monetarios, y es expresada así:

$$S_I = \{I_1, I_2, \ldots, I_t, \ldots, I_Z\}$$

Análisis del problema dinámico de consumo con Z períodos.

Veremos el caso del análisis dinámico del consumo, y apreciaremos que este análisis permite hacer algunas conclusiones sobre la forma del ahorro. Tratarems el caso de los Z períodos de actividad económica. En este caso, formulamos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}&\max\ U_{dyn}(S_X)\\ &s.a.: G_{dyn}(S_X) \leq VA(S_I)\end{aligned}$$

El gasto dinámico es igual al valor actual de toda la serie de gastos periódicos:

$$G_{dyn}(S_X) = \sum_{t=1}^{t=Z} \frac{p_t \times X_t}{(1+r)^{t-1}}$$

El precio es el valor unitario del artículo que compramos. El valor actual del precio es:

$$VA(p_t) = \frac{p_t}{(1+r)^{t-1}}$$

Si nuestra utilidad dinámica tiene estructura Cobb-Douglas, entonces obtenemos la siguiente relación matemática:

$$X_t = \frac{s_{dyn-t} \times VA(S_I)}{VA(p_t)}$$

De ella pueden ser obtenidas las siguientes expresiones:

$$X_t = \frac{s_{dyn-t} \times VA(S_I) \times (1+r)^{t-1}}{p_t}$$

[Número de artículos comprados]

$$GI_t(X_t) = p_t \times X_t = s_{dyn-t} \times VA(S_I) \times (1+r)^{t-1}$$

[Gasto en artículos en el período *t*]

El programa de ahorros y créditos para Z períodos

hora nos interesa hallar el programa de ahorros para un total de Z períodos. Si un ahorro tiene valor negativo, entonces representará a un crédito. En el período 1 es válido lo siguiente:

$$I_1 = GI_1 + \omega_1$$

es decir, que en el primer período el dinero disponible es destinado a dos usos: gasto en el período y ahorro en el período. Pero si consideramos que lo ahorrado en el primer período dará rendimiento bruto, o sea monto ahorrado más interés (si es crédito, la devolución del préstamo más el pago del interés) en el segundo período, será válido afirmar lo siguiente:

$$I_2 + \omega_1 \times (1 + r) = GI_2 + \omega_2$$

En este caso, vemos que la disponibilidad monetaria del segundo período, aumentada con el rendimiento bruto del ahorro del primer período, puede ser destinada a dos usos: gasto en el período y ahorro en el período. Análogamente, en diversos períodos, con excepción del primero y el último, será válida la siguiente expresión:

$$I_t + \omega_{t-1} \times (1 + r) = GI_t + \omega_t$$

En el último período, el período Z, dado que ya no hay un período adicional, no se realizará un ahorro. Por lo tanto, ω_Z tendrá un valor de cero, y así será válida la siguiente expresión:

$$I_Z + \omega_{Z-1} \times (1 + r) = GI_Z$$

Según esta expresión, el dinero disponible en el período Z aumentado con el rendimiento bruto del ahorro del período Z-1 es destinado íntegramente al gasto en consumo del período Z. Remarquemos que el ahorro de este período Z es, necesariamente, igual a cero.

La expresión del gasto en artículos para cada período permite obtener la forma del ahorro de cada período. Encontramos que el ahorro de un período *j* es igual a:

$$\omega_j = \sum_{t=1}^{t=j} \left[I_t \times (1 + r)^{j-t} \right] - VA(S_I) \times (1 + r)^{j-1} \times \sum_{t=1}^{t=j} s_{dyn-t}$$

Con esta ecuación se obtiene la trayectoria, es decir, la programación dinámica de los Z ahorros, a la que denominaremos S_ω y a la que exponemos así:

$$S_\omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t, \ldots, \omega_{Z-1}, 0\}$$

El caso particular de dos períodos

En este caso, los consumos óptimos periódicos serán:

$$X_1 = \frac{s_{dyn-1} \times VA(S_I)}{p_1}$$
$$X_2 = \frac{s_{dyn-2} \times VA(S_I) \times (1+r)}{p_2}$$

En el caso dinámico de dos períodos, el ahorro en el segundo período es cero, mientras que el ahorro en el primer período tiene la forma siguiente:

$$\omega_1 = s_{dyn-2} \times I_1 - \frac{s_{dyn-1} \times I_2}{(1+r)}$$

Como siempre, si el ahorro tiene valor negativo, representará a un crédito. Lo que esta expresión simple muestra es que el ahorro depende en forma directa de la tasa de interés, de nuestro ingreso del período presente y de nuestra preferencia por consumir en el perído futuro. Además, vemos que el ahorro depende inversamente de nuestra preferencia por el consumo en el período presente y de nuestro ingreso del período futuro.

Esta expresión define un límite máximo para el ahorro, ya que si la tasa de interés subiera hasta el infinito, el ahorro sería igual a:

$$\omega_{\max} = s_{dyn-2} \times I_1$$

Como se ve, el ahorro máximo encontrado en este análisis corresponde a una proporción predeterminada del ingreso del período presente, y tal proporción es igual a nuestra preferencia por el consumo en el futuro.

También se encuentra una tasa de interés neutral, es decir, aquella que no genera una actividad de ahorro ni de endeudamiento. La expresión correspondiente será:

$$r_{neutral} = \frac{s_{dyn-2} \times I_1}{s_{dyn-1} \times I_2} - 1$$

El valor de la tasa de interés neutral depende directamente del ingreso presente y de la preferencia por el consumo futuro, e inversamente del ingreso futuro y de la preferencia por el consumo presente.

Las conclusiones a que llegamos aquí son interesantes. La optimización sugiere que puede encontrarse una manera adecuada de calcular la tasa de interés que deja en la indiferencia a los ahorristas (ahorro nulo y crédito nulo). Esta tasa de interés neutral se reduce a medida que los ingresos futuros sean más altos o que los ingresos del presente sean más bajos. La tasa también se reduce cuando la preferencia por consumir en el momento corriente es más alta y cuando la preferencia por consumir en el momento futuro es más baja.

Un modelo alternativo

Consideremos ahora otra estructura para la utilidad dinámica. Sea la siguiente función dinámica de utilidad, conocida como suma descontada de logaritmos:

$$U_{dyn}(S_X) = \sum_{t=1}^{t=Z} \left[\ln X_t \times d_{psi}^{t-1} \right]$$

El factor d_{psi} corresponde a un valor positivo menor que la unidad que indica que nuestra psicología da preferencia al consumo en el período presente respecto al consumo en cualquier período futuro. Veamos lo que pasa en el caso de dos períodos. La utilidad dinámica toma la siguiente forma particular:

$$U_{dyn}(S_X) = \ln X_1 + \ln X_2 \times d_{psi}$$

Nuevamente, tendremos que resolver el problema del consumo dinámico, es decir:

$$\begin{aligned} &\max \ U_{dyn}(S_X) \\ &s.a.: G_{dyn}(S_X) \leq VA(S_I) \end{aligned}$$

Si definimos las preferencias por consumo s_{dyn-t} como:

$$s_{dyn-1} = \frac{1}{1 + d_{psi}}$$

$$s_{dyn-2} = \frac{d_{psi}}{1 + d_{psi}}$$

Encontramos que, al igual que en el caso anterior, los consumos periódicos y el ahorro del primer período serán:

$$X_1 = \frac{s_{dyn-1} \times VA(S_I)}{p_1}$$

$$X_2 = \frac{s_{dyn-2} \times VA(S_I) \times (1 + r)}{p_2}$$

$$\omega_1 = s_{dyn-2} \times I_1 - \frac{s_{dyn-1} \times I_2}{(1+r)}$$

Mercado financiero

Analicemos qué pasa si dos sujetos, A y B, se encuentran y desean realizar intercambio de fondos financieros. Esto es, uno descubre que tiene demasiado dinero hoy y poco en el futuro, en tanto que el otro se da cuenta de que tiene poco dinero hoy y mucho en el futuro. Surgen dos fórmulas de ahorro:

$$\omega_{A1} = s_{dyn-A2} \times I_{A1} - \frac{s_{dyn-A1} \times I_{A2}}{(1+r)}$$

$$\omega_{B1} = s_{dyn-B2} \times I_{B1} - \frac{s_{dyn-B1} \times I_{B2}}{(1+r)}$$

Cada sujeto tiene su propia tasa de interés neutral y su propio nivel de ahorro máximo. Si realizan intercambio de fondos financieros, uno resultará ser ahorrista o "prestador", meientras que el otro necesariamente será el deudor o tomador de préstamos. De acuerdo a esto, tenemos que la suma de los dos "ahorros" es cero:

$$\omega_{A1} + \omega_{B1} = 0$$

Si suponemos que B toma un crédito y que A presta dinero a B, entonces el préstamio tomado por B (ahorro negativo, es decir, $-\omega_{B1}$)será igual al ahorro de A:

$$-\omega_{B1} = \omega_{A1}$$

Al realizar el intercambio de fondos financieros, aparecerá el concepto de la **apreciación de la tenencia presente de fondos**, es decir, el valor relativo de la tenencia de dinero en el presente respecto a la tenencia de dinero en el futuro:

$$valrelativo = (1+r) = \frac{s_{dyn-A1} \times I_{A2} + s_{dyn-B1} \times I_{B2}}{s_{dyn-A2} \times I_{A1} + s_{dyn-B2} \times I_{B1}}$$

De allí puede ser obtenida la tasa de interés del mercado de fondos financieros:

$$r_m = \frac{s_{dyn-A1} \times I_{A2} + s_{dyn-B1} \times I_{B2}}{s_{dyn-A2} \times I_{A1} + s_{dyn-B2} \times I_{B1}} - 1$$

Al reemplazar la tasa de interés obtenida en las expresiones de ahorro-crédito de A y B uno llega a determinar quién se torna prestador y quién tomador de préstamos, así como el monto exacto de intercambio de fondos financieros. Determinar esto es sencillo: basta con comparar la tasa de mercado con las tasas de interés neutrales de cada agente. La tasa de mercado por fuerza estará entre los valores de las dos tasas neutrales. Supongamos que sucede lo siguiente:

$$r_{neutral-A} < r_m < r_{neutral-B}$$

La tasa r_m hace que ahorrar sea atractivo para A, cuya referencia mínima necesaria para colocar su dinero en el banco era la baja tasa $r_{neutral\text{-}A}$. En el caso de B, éste considera que r_m es lo suficientemente baja como para tomar dinero en préstamo, ya que su tasa de indiferencia era la alta tasa $r_{neutral\text{-}B}$. Si el orden de las tasas neutrales fuese el inverso, entonces B ahorraría y A tomaría crédito.

¿Cuánto es lo va a ahorrar A y lo que va a tomar en préstamo B? La respuesta la encontramos en las ecuaciones de ahorro y préstamo de los dos agentes. Sus acciones depoenderán del valor de la tasa de mercado. Nosotros ya sabemos que el ahorro de A va a tener el mismo valor que el préstamo tomado por B. Veamos las expresiones finales:

$$\omega_{A1} = s_{dyn-A2} \times I_{A1} - \frac{s_{dyn-A1} \times I_{A2}}{(1+r_m)}$$

$$-\omega_{B1} = \frac{s_{dyn-B1} \times I_{B2}}{(1+r_m)} - s_{dyn-B2} \times I_{B1}$$

Recordemos una vez más que los dos montos son iguales. La tasa de mercado viene dada por las disponibilidades de dinero y por las voluntades de consumo presente versus futuro de ambos agentes. Las modificaciones en los parámetros afectarían el ahorro-crédito de los dos agentes. Un cambio en los parámetros podría hacer que ambos negociaran más (más ahorro de A y más crédito tomado por B). Otro cambio en los parámetros podría hacer que A tomara crédito y que B ahorrara.

Otro ejemplo para un mercado de fondos financieros

Supongamos que A sigue siendo un ahorrista típico, mientras que B sabe que tendrá I_{B2} dentro de un mes, pero desea tener dinero para gastar hoy. B tendrá una función de demanda de fondos financieros tal como:

$$\omega_{B1}^{D} = \frac{I_{B2}}{(1+r)}$$

La interacción de A y B define un mercado de fondos financieros, surgiendo una tasa de interés de mercado como:

$$r_m = \frac{s_{dyn-A1} \times I_{A2} + I_{B2}}{s_{dyn-A2} \times I_{A1}} - 1$$

El monto negociado de fondos financieros en el período 1 es igual a:

$$\omega_m = \frac{s_{dyn-A2} \times I_{A1}}{s_{dyn-A1} \times \frac{I_{A2}}{I_{B2}} + 1}$$

Inversión en bienes de capital

Veamos ahora el caso de la inversión en recursos productivos. Usaremos nuevamente una función de utilidad dinámica del tipo suma descontada de logaritmos:

$$U_{dyn}(S_X) = \ln X_1 + \ln X_2 \times d_{psi}$$

Dado que el problema es de inversión, centraremos nuestro análisis en el estudio del uso de recursos brutos para su transformación productiva en artículos terminados. Usaremos el concepto de función de transformación productiva o función de producción Q(L). Q(L) permite transformar inputs o recursos brutos L en outputs Q(L). En este caso, no se cumple que Q(L) sea igual a X. En lugar de ello, diremos que Q representa lo producido y X lo consumido. Q vendrá determinado por:

$$Q = Q(L)$$

El problema será

$$\max U_{dyn}(S_X)$$

s.a.:

1. $L_1 = T_1$
2. $\omega_1 = Q(L_1) - X_1$
3. $L_2 = T_2 + \omega_1$
4. $X_2 = Q(L_2)$

Se trata de aplicar un procedimiento de optimización para definir el monto de inversión de una unidad económica. El renglón 1 nos dice que se hará uso de inputs por un monto L_1, y que estos inputs son iguales a un monto disponible de inputs como T_1. T_1, pues, representa la posesión de activos de esta unidad económica, siendo el concepto análogo a aquél del ingreso en el período 1. El renglón 2 nos habla de la inversión. Los inputs L_1 *necesariamente* serán transformados en outputs $Q(L_1)$. El monto de inversión ω_1 será igual al monto total de los outputs obtenidos $Q(L_1)$, menos una parte que es retirada para el consumo, por un valor de X_1. El renglón 3 nos indica que los inputs disponibles para el período 2 son iguales a una magnitud predeterminada T_2 más el valor de la inversión realizada en el período anterior, es decir, ω_1. Este T_2 es un concepto análogo al de ingreso en el período 2. Finalmente, el renglón 4 nos indica que el total de los outputs obtenidos en el período 2 serán utilizados para consumo.

Haremos uso de la siguiente función de transformación productiva:

$$Q(L_t) = L_t^{\frac{1}{2}}$$

Si definimos los $s_{dyn\text{-}t}$ de la siguiente forma:

$$s_{dyn-1} = \frac{1}{1 + {d_{psi}}/{2}}$$

$$s_{dyn-1} = \frac{{d_{psi}}/{2}}{1 + {d_{psi}}/{2}}$$

Tendremos que los valores de los consumos X_1 y X_2 serán:

$$X_1 = s_{dyn-1} \times \left(T_1^{1/2} + T_2 \right)$$

$$X_2 = \left[s_{dyn-2} \times \left(T_1^{1/2} + T_2 \right) \right]^{1/2}$$

El monto invertido será:

$$\omega_1 = s_{dyn-2} \times T_1^{1/2} - s_{dyn-1} \times T_2$$

Vemos que la programación financiera dinámica, además de ayudarnos a plantear matemáticamente el problema del ahorro-crédito, también nos ha permitido enfocar el problema de la inversión en factores productivos.

Riesgo financiero y mercados de seguros

La importancia del tema de riesgo financiero y mercados de seguros radica en la posibilidad que abre de ilustrar las consideraciones hechas por un pre-apostador, un individuo que aún no ha decidido si entrará en un juego de azar con un cierto pago o si preferirá la tranquilidad característica de las situaciones seguras. Será necesario conocer un poco de estadística para comprender los fundamentos del cálculo que se va a formular. Sin embargo, el lector que no haya tenido contacto con ella puede seguir los procedimientos haciendo un mayor énfasis en las implicaciones cualitativas *ex-ante* y *ex-post* de los mismos, puesto que éstas son, ciertamente, sencillas, directas y claras.

Un modelo de riesgo financiero

Supondremos que un agente tiene una preferencia por el ingreso de acuerdo a una función de utilidad con rendmiento decreciente a escala. Para el caso, nos habrá de servir muy bien la siguiente función:

$$U(D) = D^{1/2}$$

Esta responde con aumentos proporcionalmente menores en la función (nivel de utilidad) cuando recibe incrementos proporcionalmente iguales y sucesivos en la variable (dinero). El individuo deberá enfrentar un juego de azar, en el que la variable aleatoria es la cantidad de dinero que nuestro amigo recibirá por haber entrado a jugar. La distribución será continua e uniforme. Continua porque cualquier número que pertenezca al intervalo definido por el retorno mínimo y el retorno máximo del juego puede ser el retorno que efectivamente reciba el agente. Uniforme, porque la probabilidad de que aparezca un resultado cualquiera del juego es exactamente la misma que la correspondiente a cada uno de los demás resultados. En estadística esto se expresa utilizando la función de distribución acumulativa. La FDA de una variable aleatoria D distribuída uniformemente en el intervalo mencionado representa la probabilidad de que la diferencia entre el número deseado y la cota inferior, diferencia que es función de ese número, aparezca como resultado del juego. Para nuestra variable D, tenemos una FDA cuyo valor será:

$$FDA = 0, \; si\, D < D_{\min}$$
$$FDA = \frac{D - D_{\min}}{D_{\max} - D_{\min}}, \; si\, D \in [D_{\min}, D_{\max}]$$
$$FDA = 1, \; si\, D > D_{\max}$$

Lo que sí nos interesa a nosotros es el siguiente resultado estadístico. El valor esperado o valor que con mayor probabilidad saldrá como resultado del juego, E(D), será :

$$E(D) = \frac{D_{\max} + D_{\min}}{2}$$

La función de utilidad de este ingreso riesgoso, $U_R(D)$, no puede ser igual a la del ingreso cierto, U(D). $U_R(D)$ será, luego:

$$U_R(D) = 0, si\, D < D_{\min}\; o\, D > D_{\max}$$

$$U_R(D) = D^{1/2}, si\, D = D_{\min}\; o\, D = D_{\max}$$

$$U_R(D) = D_{\min}^{1/2} + \left(D_{\max}^{1/2} - D_{\min}^{1/2}\right) \times \frac{D - D_{\min}}{D_{\max} - D_{\min}}$$

La estadística nos dice que la tercera expresión matemática tiene una distribución aleatoria cuya esperanza o valor esperado es:

$$E(U_R(D)) = \frac{D_{\max}^{1/2} + D_{\min}^{1/2}}{2}$$

Esta esperanza puede hallar su equivalente en un nivel de retorno cierto, tal como D^* . El ingreso cierto D^* que brinda una utilidad U(D) igual al valor esperado de $U_R(D)$ sería:

$$D^* = E(U_R(D))^2 = \frac{\left(D_{\max}^{1/2} + D_{\min}^{1/2}\right)^2}{4}$$

Denominamos a D^* el ingreso cierto equivalente.

Ahora analicemos lo siguiente: Si una persona puede jugar y obtener como resultado los retornos de 36 dólares y 100 dólares, ¿qué ingreso cierto le parecerá que equivale en utilidad al resultado más probable del juego? En principio, ¿cuál es el retorno más probable del juego? Es claro que es el de 68 (o sea la mitad de la suma de 100 y 36). La siguiente pregunta es ¿qué utilidad riesgosa ($U_R(D)$) corresponde a este retorno? Esa utilidad va a ser de $((36)^{1/2}+(100)^{1/2})/2$, o sea de 8. Luego, el ingreso cierto equivalente a la situación riesgosa (el otro nombre del juego) es de 8^2 o 64.

<u>Determinación de la prima en el modelo de seguros</u>

Veremos ahora cómo es determinada la prima de seguros. Teniendo el ingreso esperado E(D) y el ingreso cierto equivalente D^*, podemos calcular la prima:

$$prima = E(D) - D^*$$

Esto es:

$$prima = \frac{\left(D_{\max} + D_{\min}\right)}{2} - \frac{\left(D_{\max}^{1/2} + D_{\min}^{1/2}\right)^2}{4}$$

La prima calculada para nuestro ejemplo es igual a 68-64, o sea, 4.

Veamos cómo funciona el concepto de prima en este modelo mecánico de seguros. Si una persona posee un determinado número de activos, la situación que deberá enfrentar aquí es la de la fluctuación probable del valor de sus activos. Si el individuo es, por ejemplo, un agricultor, sus cosechas pueden ser muy buenas o muy malas, apareciendo un resultado promedio determinado. El agricultor sabe que lo más probable es que obtenga, como promedio de muchas cosechas, un resultado como el valor esperado. Pero sus relaciones con el mercado no le van a permitir las libertades de los procesos aleatorios. Así, él puede comprometerse a contribuír con una prima igual a la diferencia entre el ingreso probable y el ingreso cierto equivalente a una bolsa común, de manera que los que administran la bolsa le van a permitir estar siempre en el nivel correspondiente al ingreso cierto equivalente, con lo que el campesino ganará estabilidad. Los administradores de la bolsa, por su parte, dado que no ven ningún problema en la inestabilidad de las variables económicas, ganarán en el mediano plazo (aproximadamente, pues es lo esperado) tantas veces el monto de la prima como períodos de actividad económica hayan transcurrido