Estrategia
CONSULTORES DE NEGOCIOS
http://estrategiapro.tripod.com

APROXIMACIÓN DE RUFASTO AL PROBLEMA DEL CONTROL OPTIMO

Augusto I. Rufasto

arufast@pucp.edu.pe

JULIO 2002

APROXIMACIÓN DE RUFASTO AL PROBLEMA DEL CONTROL ÓPTIMO

http://www.geocities.com/arufast/juegos.html

Augusto I. Rufasto
Consultor de Estrategias de Negocios
arufast@yahoo.com
http://rufasto.tripod.com
Teléfono: (511) 721-3492
Correspondencia: Calle Cayetano Heredia 490, Lima 11, Perú.

Das Geld!
Revista Electrónica de Economía Teórica y Aplicada
www.geocities.com/arufast

Estrategia
Consultores de Negocios
http://estrategiapro.tripod.com

CONTENIDO

APROXIMACIÓN DE RUFASTO AL PROBLEMA DEL CONTROL ÓPTIMO

AUGUSTO I. RUFASTO

Introducción

La Teoría del Control Óptimo (Optimal Control Theory) estudia problemas de estado-espacio, es decir, problemas que involucran variables inscritas en un espacio n-dimensional y el valor de una función de estado, la cual depende de un punto del espacio, siendo la magnitud de la función un valor de estado.

La forma en que la Teoría del Control Óptimo afronta este problema presenta una serie de ecuaciones y criterios matemáticos complejos y muchas veces ilegibles. He comprobado que la justificación de las estructuras ecuacionales del control óptimo no suele ser suficientemente completa, por lo que el dominio de tales estructuras requiere el uso de vigorosas habilidades mnemotécnicas, en lugar del recurso de capacidades analíticas de nivel académico medio y superior. En razón de mi apreciación personal de tal situación, he preferido construir una aproximación al problema del control óptimo sencilla y sólida en sus fundamentos. Es mi interés al presentar este trabajo de investigación lograr una mayor divulgación pública del problema del control óptimo sobre una base conceptual asequible al lector promedio. También es mi interés hacer llegar mi propuesta a la comunidad académica matemática.

Problemas de estado-espacio

Ejemplo de un problema de estado-espacio sería el de un automóvil viajando a velocidad variable y aceleración constante en la carretera. El automóvil parte de un punto considerado como el origen (valor de distancia recorrida igual cero). Se considera que el espacio n-dimensional incorpora únicamente el tiempo (es un espacio 1-dimensional), mientras que el estado se manifiesta en el valor de la distancia recorrida o posición del auto (en el momento inicial, el valor del estado es cero). La situación de estado-espacio se centra en saber qué espacio ha recorrido el automóvil cuando el reloj indica que ha transcurrido una determinada cantidad de segundos luego de que el auto inició su carrera.

Programas óptimos que resuelven problemas de estado-espacio

Un problema de estado-espacio más complejo mostraría al automóvil recorriendo una pista con subidas y bajadas, con curvas y con hoyos. En tal caso, la velocidad del auto sería variable y la aceleración de éste también lo sería. Dependiendo del mapa de la pista, uno puede decir con anticipación dónde conviene bajar la velocidad y dónde conviene aumentarla. Tal programa anticipado de gestión de la velocidad permitirá recorrer la pista en el menor tiempo posible sólo si el programa es óptimo. Programas no óptimos darán como resultado un recorrido de mayor duración que el programa óptimo.

Aplicación de Control Óptimo en la economía

La economía puede hacer uso de los criterios de control óptimo. Supóngase que el problema de estado-espacio es uno tal que considera una realidad cambiante, pero que debe proveer de un valor económico tipificable. La realidad cambiante mostrará que la demanda sube y baja, los intereses de los préstamos cambian, también cambian los tipos de cambio, el clima sufre variaciones, y sucede una serie adicional de cambios de los parámetros que definen el problema económico. Esta realidad cambiante es análoga a la pista accidentada de nuestro ejemplo del automóvil.

Por otro lado, nosotros medimos el desempeño de la economía con valores económicos como "estabilidad" y "producto bruto". Estas mediciones corresponderían a estados. En el mes de enero (inscrito en el espacio) la economía tiene un desempeño determinado (el cual está inscrito en el universo de estados). Como en cualquier problema de estado-espacio, cada espacio arroja un valor situacional, es decir, un valor del estado.

La solución de un problema de estado-espacio económico se traduce en un programa con calendario de medidas económicas. En enero, bajar la tasa de interés; en febrero, subir la tasa de interés y bajar el tipo de cambio; en marzo, subir los impuestos; en abril, otorgar subsidios; en mayo, promover los créditos, y así sucesivamente. Las medidas dependen del tiempo (que es el espacio) y su finalidad es crear un valor de desempeño (que es el estado).

Expresión matemática del problema económico

Una síntesis del problema económico incluye siempre la cuestión de la optimización, la directriz de deseo y necesidad, las relaciones de transformación de los recursos, la disponibilidad de éstos y el papel jugado por el dinero. En forma sencilla, podemos expresar el problema económico central como:

$$\begin{aligned} &\max\ V(X) \\ &s.a.: R(X) \leq T \end{aligned}$$

V representa, en este caso, el bienestar que una economía genera para una determinada unidad económica. X representa la cantidad de todos los productos que la economía elaborará u obtendrá. R es una función que calcula los requerimientos en recursos necesarios para la obtención de X. T muestra la disponibilidad total de recursos brutos. La economía elevará el bienestar de la sociedad, decidiendo el valor más adecuado del volumen de producción.

Dado que R(X) es una función de costo, la función objetivo a ser optimizada tendrá que incluir la función de requerimientos con signo negativo, es decir que al valor V(X) debe sumarse la expresión -R(X). Como R(X) y V(X) están medidos en unidades diferentes, es necesario multiplicar a R(X) por un factor de conversión, que denotaremos por ρ. Obtenemos así la siguiente expresión para el problema de optimización:

$$\max \; V(X) - \rho \cdot R(X)$$
$$s.a.: R(X) \leq T$$

Los dos procesos de transformación

Profundizaremos sobre las funciones que definen una economía. Imaginemos un proceso que comporte producción de bienes para satisfacer la necesidad de las personas. Estaríamos hablando de dos procesos de transformación: En el primero, se convierte material bruto en artículos (lo llamaremos proceso Q). En el segundo, se convierte artículos o bienes terminados en satisfacción (lo llamaremos proceso V).

Proceso Q

Éste es el primer proceso de la cadena de transformación. Se toma elementos en estado bruto y se les refina hasta transformárseles en artículos acabados.

$$X = Q(L)$$

L : Cantidad de recursos brutos llevados al proceso de transformación.
X : Cantidad de bienes finales obtenidos.
Q : Función matemática que representa al proceso de transformación.

Proceso V

Éste es el segundo proceso de la cadena de transformación. Se toma los bienes terminados y se les utiliza o consume hasta transformárseles en bienestar.

$$U = V(X)$$

X : Cantidad de bienes finales consumidos o usados.
U : Medida de la satisfacción final obtenida.
V : Función matemática que representa al proceso de obtención de bienestar mediante el consumo y uso de los bienes.

El modelo matemático de la optimización momentánea

La función objetivo que debe ser optimizada recibirá ahora el nombre de función Λ(X). Con esto, nuestra expresión del rpoblema de optimización se torna en:

$$\max \; \Lambda(X) = V(X) - \rho \cdot R(X)$$
s.a.:
$$R(X) \leq T$$

Donde:

X : Función de estado.
V(X) : Función de desempeño, correspónde a una evaluación del estado X.
R(X) : Costo total de transformación.

$\Lambda(X)$	:	Función de satisfacción neta, FSN.
ρ	:	Factor de conversión de unidades de costo a unidades de medición del efecto positivo. Este factor de conversión es independiente del valor de X.
T	:	Disponibilidad total de recursos susceptibles de ser transformados.

El sistema económico tiene como meta elevar el valor de V, basándose en el control de la variable X.

Funciones de transformación

En el análisis económico nos interesa transformar ciertos valores en otros. Como ya se vio, los procesos de transformación que se usarán son dos: El proceso Q y el proceso V.

Operatividad de Q

Q transforma recursos brutos de la economía en bienes susceptibles de ser consumidos. Como ya se vio, responde a la siguiente expresión:

$$X = Q(L)$$

Los bienes producidos *X* y los recursos usados *L* son vectores. Así, el input está conformado por los recursos brutos de *m* tipos diferentes, y el output está conformado por los bienes producidos de *n* tipos distintos.

La actividad de planeación de la producción lleva a plantear metas productivas y a evaluar los requerimientos de recursos necesarios. Así, si *X* mide la meta de producción y *L* el nivel de los requerimientos, usaremos la siguiente expresión para determinar el valor de *L*:

$$L = Q^{-1}(X)$$

Q^{-1} será la función de requerimientos productivos necesarios para conseguir *X* de producción final. Si damos un nombre a Q^{-1}, como *R*, tenemos:

$$L = R(X)$$

La expresión mostrada nos ayudará a formular diversos problemas económicos usando como referencia a *X*.

Operatividad de V

V transforma la producción en satisfacción, y brecibe el nombre de Función de Desempeño. Mediremos a la satisfacción en “unidades de satisfacción” o “unidades de bienestar”. Será necesario dar un nombre a tales unidades, y las llamaremos *bonos*. Cualesquiera bienes producidos en esta economía se transformarán, por efecto del proceso de aprovechamiento, en bonos. Recordemos la expresión correspondiente a *V*:

$$U = V(X)$$

U estará medido en bonos, y su magnitud reflejará el grado de satisfacción de un individuo.

Optimización dinámica

El problema de optimización dinámica hace uso de criterios de optimización análogos a los de la optimización momentánea. Por ello, la formulación de problema de optimización dinámica es igual a:

$$\max\ V_{dyn}(S_X)$$
$$s.a.: R_{dyn}(S_X) \leq VA(S_T)$$

donde V_{dyn} corresponde al valor presente de un segmento de valores de utilidad instantáneos y R_{dyn} corresponde al valor presente de un segmento de valores de requerimiento instantáneos. $VA(S_T)$ denota la trayectoria de la disponibilidad de recursos asignables a los procesos de transformación instantáneos. Esta trayectoria toma la forma de una función de recursos T_t disponibles en el tiempo t:

$$S_T = \{T_t / T_t = \tau(t)\}$$

Los valores presentes son alcanzados luego de que se integra las utilidades y requerimientos instantáneos actualizados según un factor de actualización. El factor de actualización toma normalmente un valor menor a la unidad, pero, a fines de simplificar esta exposición, tomaremos ese valor como igual a la unidad. De ello, resulta que:

$$VA(S_T) = \int_{t=0}^{t=Z} \tau(t)dt$$

y llamamos total de recursos disponibles a la función:

$$total(S_T) = \int_{t=0}^{t=Z} \tau(t)dt$$

por lo que ahora tenemos:

$$VA(S_T) = total(S_T)$$

Para la discusión que sigue, $V_{dyn}(X)$ será denotado simplemente como V(X); $R_{dyn}(X)$ será denotado como R(X); $VA(S_T)$, que equivale a $total(S_T)$, será denotado simplemente como T. De este modo, la optimización dinámica será expresada como:

$$\max\ V(X)$$
$$s.a.: R(X) \leq T$$

Como sabemos, esta expresión debe ser reformulada, convirtiéndose en la expresión siguiente:

$$\max\ \Lambda(X)=V(X)-\rho\cdot R(X)$$
s.a.:
$$R(X)\leq T$$

Optimización sin restricción en la disponibilidad de recursos

Muchos problemas de optimización no son afectados por restricciones en la disponibilidad de recursos. Estos problemas pueden ser expresados como:

$$\max\ \Lambda(X)$$

Como vemos, las restricciones de recursos ya no están presentes en este problema.

Optimización instantánea

Un instante corresponde a la expresión *dt*. El valor de la función de satisfacción neta Λ(X) en ese instante corresponde a *d*Λ(X). Calcularemos el valor de *d*Λ(X) de acuerdo a la siguiente expresión:

$$d\Lambda(X)=dV(X)-d(\rho\cdot R(X))$$

Desarrollando la expresión:

$$d\Lambda(X)=dV(X)-(\rho\cdot dR(X)+R(X)\cdot d\rho)$$

El interés nuestro será ahora hacer máximo el valor de la función de satisfacción neta instantánea, es decir que tenemos que hacer máximo el valor de *d*Λ(X).

Continuamos con el desarrollo de la expresión:

$$d\Lambda(X)=\frac{dV(X)}{dt}\cdot dt-\left(\rho\cdot\frac{dR(X)}{dt}\cdot dt+R(X)\cdot\frac{d\rho}{dt}\cdot dt\right)$$

Reformulando la expresión:

$$\frac{d\Lambda(X)}{dt}=\frac{dV(X)}{dt}-\left(\rho\cdot\frac{dR(X)}{dt}+R(X)\cdot\frac{d\rho}{dt}\right)$$

La expresión $\frac{d\Lambda(X)}{dt}$ corresponde a la variación instantánea de la función de satisfacción neta. Como todo ratio de diferenciales que tiene como denominador a *dt*, $\frac{d\Lambda(X)}{dt}$ es una velocidad. Específicamente, es la velocidad de cambio de la FSN.

Hallar el valor máximo de *d*Λ(X) equivale a hallar el máximo valor de $\frac{d\Lambda(X)}{dt}$, dado que el valor de *d*t es constante, e igual a un infinitésimo. Entonces, para hallar el valor máximo de la FSN instantánea, tenemos que hallar el valor máximo de la variación instantánea de FSN, o sea, la velocidad de cambio de la FSN.

Nomenclatura

Para efectos de volver más sencilla la formulación del problema de la optimización dinámica, recurriremos a una nomenclatura específica.

En primer lugar, definimos la función ΛI(*X*) como la función instantánea de satisfacción neta (en verdad es la velocidad de cambio de la FSN corriente):

$$\Lambda I(X) = \frac{d\Lambda(X)}{dt}$$

Luego definimos la función VI(*X*) como la función instantánea de desempeño (en verdad es la velocidad de cambio de la función de desempeño corriente):

$$VI(X) = \frac{dV(X)}{dt}$$

Por lo visto anteriormente, la relación entre ΛI(X) y VI(X) es la siguiente:

$$\Lambda I(X) = VI(X) - \left(\rho \cdot \frac{dR(X)}{dt} + R(X) \cdot \frac{d\rho}{dt}\right)$$

Nos interesa resolver el problema de la maximización de la función de satisfacción neta instantánea:

$$\max \Lambda I(X)$$

sujeto a una serie de restricciones. Estas restricciones serán vistas posteriormente.

Una aproximación simplificada al problema

Para simplificar al problema, vamos a definir el costo de la transformación de la manera siguiente:

$$R(X) = X$$

Con esto, la determinación de ΛI(X) toma la forma:

$$\Lambda I(X) = VI(X) - \left(\rho \cdot \frac{dX}{dt} + X \cdot \frac{d\rho}{dt}\right)$$

La expresión $\frac{dX}{dt}$, que es la velocidad de cambio del estado, o la velocidad de cambio de X, puede ser reexpresada como:

$$X^\circ = \frac{dX}{dt}$$

La expresión $\frac{d\rho}{dt}$, que es la velocidad de cambio del estado, o la velocidad de cambio de ρ, puede ser reexpresada como:

$$\rho^\circ = \frac{d\rho}{dt}$$

Ahora la determinación de ΛI(X) toma la forma:

$$\Lambda I(X) = VI(X) - (\rho \cdot X^\circ + X \cdot \rho^\circ)$$

Acción del control

El control es el que permite modificar una serie de parámetros que participan en el proceso dinámico. En el ejemplo del automóvil, una pista de subida exigirá que el auto cambie su mecanismo de "tercera velocidad" a "primera velocidad", y tal será la tarea del control de la caja de cambios. Si la pista presenta una curva hacia la derecha, se requerirá girar el timón en esa dirección: tal será la tarea del control de dirección. Si se está manejando a velocidad y aparece un obstáculo móvil (puede tratarse de una rama que se desplaza, o de un animal que cruza la carretera), tendremos que frenar, tarea a ser ejercida por el control de freno. Un automóvil hace uso de numerosos controles.

El uso de múltiples controles no está restringido a los automóviles o a los equipos mecánicos y electrónicos. Un grupo humano también hace uso de controles. Un buzo libre tiene que controlar muchos de sus movimientos, a fin de optimizar el uso de oxígeno y lograr el desplazamiento submarino deseado. Un escuadrón militar responde a controles consistentes en diversas órdenes del comando: si el comando indica avanzar rápido, todo el escuadrón cumple con esa orden, y si éste ordena dar media vuelta o detenerse, también cumplirá con tales indicaciones.

En la economía se requiere el uso de controles como los gastos públicos en compra de bienes nacionales, la tasa de interés cobrada por el Banco Central, las tasas impositivas, el encaje bancario, y otros por el estilo.

El desempeño, pues, es alterado mediante la acción del control. La teoría del control óptimo busca encontrar una programación del valor de todos los controles, de manera que en el momento cero pueda saberse cuál será el valor óptimo de todos estos controles en cada momento futuro.

Para efectos de la discusión que sigue, estudiaremos un único control. El control será representado por el símbolo ω (omega minúscula).

El control puede actuar en forma directa o indirecta sobre la función de desempeño VI(X), y sobre la función instantánea VI(X). Cuando el control actúa en forma directa sobre VI, decimos que la función instantánea de desempeño responde a:

$$VI = VI(X, \omega)$$

En este caso, el control influye directamente sobre el desempeño. Por ejemplo, si se trata de una actividad productiva, el control podría ser el tipo de tecnología. El manejo del control tecnológico determina los cambios tecnológicos, y éstos derivan en un diferente valor de desempeño. Una mejora tecnológica puede crear sinergias.

Pero si el control actúa directamente sobre X e indirectamente sobre VI, tenemos:

$$VI = VI(X(\omega))$$

Continuando con nuestro ejemplo del cambio tecnológico, supongamos ahora que éste no afecta directamente al desempeño, sino al valor de X. Una mejora tecnológica no generará sinergias, sino que influirá directamente sobre la producción (medida por X).

Finalmente, si este único control tiene simultáneamente acción directa e indirecta sobre VI, se producirá el siguiente caso general:

$$VI = VI(X(\omega), \omega)$$

En nuestro ejemplo, la mejora tecnológica permite incrementar la producción (influye directamente sobre X e indirectamente sobre VI) y genera sinergias (influye directamente sobre VI).

Incorporación de velocidad y aceleración del estado a la función de desempeño

Toda variable de estado posee velocidad y aceleración. Nuestra variable de estado X tiene una velocidad tal como X° y una aceleración tal como X°°, donde:

$$X° = \frac{dX}{dt}$$

Este concepto ya ha sido visto: es la velocidad, y corresponde al cambio instantáneo del estado.

$$X°° = \frac{d^2X}{dt^2}$$

Este concepto es la aceleración corresponde al cambio instantáneo de la velocidad. Por lo mismo, la aceleración es la *velocidad de la velocidad*.

Prescindiendo del concepto de control, analicemos la siguiente expresión:

$$VI = VI(X, X°, X°°)$$

Esta expresión nos indica que el desempeño depende no sólo del valor de estado, sino de la velocidad y de su aceleración del valor de estado.

Para comprender esto, imaginemos que un hombre de negocios evalúa el desempeño económico de una unidad de negocios, de acuerdo a la expresión siguiente:

$$VI = VI(X, X^{\circ})$$

Si X representa el ingreso monetario de la unidad de negocios, entonces X° representa la velocidad a la que estos ingresos son incrementados. El valor del desempeño de la unidad de negocios en cuestión depende, según nuestro hombre de negocios, no sólo de *cuánto beneficio* se produzca, sino de *qué tan rápido* se realice esa producción de beneficio. Por lo mismo, un criterio más sofisticado llevará a pensar en:

$$VI = VI(X, X^{\circ}, X^{\circ\circ})$$

como un juego de criterios ampliado, que incorpora el criterio de cuál sea la velocidad a la que la propia velocidad se incrementa.

Acción conjunta de velocidad y control

Volvamos ahora al caso del hombre de negocios interesado en producción y velocidad de producción. El caso general que incorpora la acción de control sobre el estado y la velocidad de cambio del estado será:

$$VI = VI(X(\omega), X^{\circ}(\omega), \omega)$$

En este caso, este único control tiene acción triple:

- El control ω actúa directamente sobre el valor de estado e indirectamente sobre la función de desempeño.
- El control ω actúa directamente sobre la velocidad de cambio del estado e indirectamente sobre la función de desempeño.
- El control ω actúa directamente sobre la función de desempeño (por ejemplo, genera sinergias).

El análisis del problema del control dependerá de la forma en que actúe el control sobre la función de desempeño.

Incorporación del tiempo en la función de desempeño

El tiempo puede influir sobre la función de desempeño. Por ejemplo, muchos insumos de producción se degradan en el tiempo. En tal caso, debe realizarse la producción en el tiempo óptimo para evitar que el insumo pierda valor en forma significativa, afectando el valor de desempeño. Otro ejemplo es encontrado en las finanzas. Si no se paga una deuda a tiempo, los intereses generan una presión financiera cada vez mayor sobre el deudor. De manera que la inclusión del tiempo en la función de desempeño responde a una necesidad real. Tenemos así:

$$VI = VI(X(\omega), X^{\circ}(\omega), \omega, t)$$

Debemos aclarar que tanto el estado como la velocidad pueden, igualmente, depender del tiempo. En tal caso, tendríamos:

$$VI = VI\left(X(\omega,t), X^\circ(\omega,t), \omega, t\right)$$

Cuando la velocidad depende de la posición

En muchas ocasiones la velocidad de un artefacto móvil puede depender de la posición en que éste se encuentre. Pensemos en un ambiente con una fuerzas distribuidas en forma continua y no uniforme. Un ejemplo de ellos sería el de un papel que es dejado libre en un ambiente en que una corriente de aire circula. Este fenómeno es fácil de ser apreciado en otoño, cuando el aire da giros múltiples en lugares semicerrados, como un ángulo en un patio, por ejemplo. Situados frente a tal ángulo, veremos que la hoja de papel parece realizar un baile: baja, sube, gira, adquiere velocidad, pierde velocidad. La distribución de fuerzas del ambiente genera una serie de aceleraciones que hacen a la hoja aumentar y reducir su velocidad, avanzar, retroceder, subir y bajar.

Por todo lo anterior, queda claro que la velocidad puede depender de la posición. La posición es el equivalente del valor de estado. Formalizando el resultado de nuestras observaciones:

$$X^\circ = X^\circ(X,t)$$

Si llevamos esto al caso general, tenemos esta variante en la que la velocidad depende del estado:

$$VI = VI\left(X(\omega,t), X^\circ(\omega,t,X), \omega, t\right)$$

O también podemos expresar esto como:

$$VI = VI\left(X, X^\circ, \omega, t\right)$$

donde (o, en términos de optimización restringida, "sujeto a las siguientes restricciones, s.a."):

$$X = X(\omega,t)$$
$$X^\circ = X^\circ(\omega,t,X)$$

Un problema básico de control óptimo

Hemos visto que existe una serie de variantes de la función de desempeño. Después de todo lo dicho, podemos proceder a analizar un problema de control óptimo referido a un tipo específico de función de desempeño. En particular, analizaremos un problema básico definido por la siguiente función de desempeño:

$$VI = VI\left(X, X^\circ, t\right)$$

donde:

$$X^\circ = X^\circ(\omega,t,X)$$

La función de desempeño seleccionada no depende directamente de ω. El valor de estado no depende directamente de t ni de ω.

Es importante resaltar que la velocidad depende de la posición (valor de estado), del tiempo y del valor del control.

Nota: También podríamos escribir, en forma resumida:

$$VI = VI(X, X°(\omega, t, X), t)$$

o, en forma aún más resumida:

$$VI = VI(X, \omega, t)$$

En estos dos casos, se pierde información. Pero es útil tener estas formas resumidas como una referencia para el análisis.

El problema de optimización que enfrentamos se refiera a la optimización del valor de ΛI. Usando la forma original no resumida de VI, tenemos que ΛI toma la forma:

$$\Lambda I(X, X°, \omega, t) = VI(X, X°, t) - (\rho \cdot X° + X \cdot \rho°)$$

donde:

$$X° = X°(\omega, t, X)$$

El problema de optimización se convierte en:

$$\max \Lambda I(X, X°, \omega, t) = VI(X, X°, t) - (\rho \cdot X° + X \cdot \rho°)$$

s.a.:

$$X° = X°(\omega, t, X)$$

Debemos definir cuáles son las variables de decisión de problema, es decir, las variables que podemos manejar a fines de alterar favorablemente el valor de la función de desempeño. Nuestro problema considerará que tanto el estado X como la velocidad X° son variables de decisión directas, mientras que el control ω es una variable de decisión indirecta. El tiempo no es una variable decisión, ya que éste avanza con una lógica independiente de nuestra voluntad y capacidad de manejo (pero si pudiéramos alterar el valor del tiempo, también éste sería una variable de decisión). Tenemos, pues, las siguientes variables de decisión:

- X
- X°
- ω

La lógica de optimización indica que una serie de problemas "adecuadamente comportados" puede someterse al criterio de la primera derivada nula (CPO, o "condición de primer orden") tomada sobre una variable de decisión. En nuestro caso, si ΛI está "adecuadamente comportada", aparecerán tres manifestaciones del criterio CPO:

$$\frac{\partial \Lambda I}{\partial X} = 0$$
$$\frac{\partial \Lambda I}{\partial X°} = 0$$
$$\frac{\partial \Lambda I}{\partial \omega} = 0$$

Dado que X° depende en forma directa de ω, si reemplazamos el valor de X° por la correspondiente función que depende sólo de ω, de X y de t, podemos dejar de lado la segunda CPO. Conservaríamos únicamente las CPOs:

$$\frac{\partial \Lambda I}{\partial X} = 0$$
$$\frac{\partial \Lambda I}{\partial \omega} = 0$$

Si nuestra función ΛI está "adecuadamente comportada", entonces cada CPO plantea una ecuación que, al ser resuelta, contribuye a la determinación del programa de control y a la programación de la actividad principal X.

La CPO del control

Una función ΛI adecuadamente comportada permitirá que surja una CPO en ω que será determinante para la especificación del programa de controles ω. La CPO tiene la forma:

$$\frac{\partial \Lambda I}{\partial \omega} = 0$$

y es equivalente a:

$$\frac{\partial VI}{\partial \omega} = \rho \cdot \frac{\partial X°}{\partial \omega}$$

y puede tomar la forma:

$$\frac{\partial VI}{\partial X°} = \rho$$

La solución de esa ecuación crea una serie de criterios que determinarán el programa de ω y de X.

La CPO del estado

Una función ΛI adecuadamente comportada permitirá que surja una CPO en X que será determinante para la especificación del programa de las actividades X. La CPO tiene la forma:

$$\frac{\partial \Lambda I}{\partial X} = 0$$

y es equivalente a:

$$\frac{\partial VI}{\partial X} = \frac{\partial(\rho \cdot X° + \rho° \cdot X)}{\partial X}$$

desarrollando esa expresión:

$$\frac{\partial VI}{\partial X} = \left(\rho \cdot \frac{\partial X°}{\partial X} + X° \cdot \frac{\partial \rho}{\partial X}\right) + \left(\rho° \cdot \frac{\partial X}{\partial X} + X \cdot \frac{\partial \rho°}{\partial X}\right)$$

es decir:

$$\frac{\partial VI}{\partial X} = \rho \cdot \frac{\partial X°}{\partial X} + X° \cdot \frac{\partial \rho}{\partial X} + \rho° + X \cdot \frac{\partial \rho°}{\partial X}$$

Por las especificaciones originales de ρ, sabemos que π es independiente de X. Consideraremos que en este problema también ρ° es independiente de X. Tenemos así:

$$\frac{\partial \rho}{\partial X} = 0$$
$$\frac{\partial \rho°}{\partial X} = 0$$

Y la CPO en X queda como:

$$\frac{\partial VI}{\partial X} = \rho \cdot \frac{\partial X°}{\partial X} + \rho°$$

La solución de esa ecuación crea una serie de criterios que determinarán el programa de ω y de X.

Una recapitulación del problema y de sus criterios de solución

Tenemos el problema siguiente:

$$\max \Lambda I(X, X°, \omega, t) = VI(X, X°, t) - (\rho \cdot X° + X \cdot \rho°)$$

s.a.:

$$X° = X°(\omega, t, X)$$

y si éste está adecuadamente comportado, entonces sus programas solución (de control y de estado) se basarán en la resolución de las siguientes ecuaciones-condiciones:

$$X° = X°(\omega, t, X)$$

$$\frac{\partial VI}{\partial \omega} = \rho \cdot \frac{\partial X^\circ}{\partial \omega}$$
$$\frac{\partial VI}{\partial X} = \rho \cdot \frac{\partial X^\circ}{\partial X} + \rho^\circ$$

Las ecuaciones mostradas muy probablemente tomarán la forma de ecuaciones diferenciales.

Nota final

Como se menciona en diversas partes de este texto, el tratamiento de un problema de control óptimo termina cuando se ha construido un programa de valores del control en el tiempo. En forma complementaria, la solución del problema ofrece un programa de valores del estado X.

El tratamiento del control óptimo permite ajustar los valores de control y del estado de manera tal que la función de desempeño alcance un valor máximo en todo momento. La aplicabilidad de esta herramienta de análisis y programación de actividades es bastante amplia en el campo económico, así como también lo es en física, astronomía y una serie de ciencias sometidas a procesos temporales predefinidos que tienen influencia sobre sus desempeños ordinarios.