Estrategia

CONSULTORES DE NEGOCIOS

http://estrategiapro.tripod.com

CONTROL ÓPTIMO DISCRETO

Augusto I. Rufasto

arufast@pucp.edu.pe

AGOSTO 2002

CONTROL ÓPTIMO DISCRETO

http://www.geocities.com/arufast/juegos.html

Augusto I. Rufasto
Consultor de Estrategias de Negocios
arufast@yahoo.com
http://rufasto.tripod.com
Teléfono: (511) 721-3492
Correspondencia: Calle Cayetano Heredia 490, Lima 11, Perú.

Das Geld!
Revista Electrónica de Economía Teórica y Aplicada
www.geocities.com/arufast

CONTENIDO

CONTROL ÓPTIMO DISCRETO
Augusto I. Rufasto

El Control

En estos modelos, el control sirve para distribuir recursos y asignarlos en diferentes períodos.

Denotaremos al control como ω (omega minúscula). En estos modelos, usaremos tres tipos de control: el ahorro (ω_s), el crédito (ω_c) y la inversión (ω_n). Mientras el ahorro implica una reserva sobre nuestros recursos disponibles, el crédito implica un uso de recursos extra a los que tenemos disponibles. El crédito es un ahorro con valor negativo, por lo que se verifica que un problema que incluya controles de ahorro puede ser reexpresarse como un problema con controles de crédito, siempre que hagamos uso de la expresión:

$$\omega_c = -\omega_s$$

En sentido inverso, si se desea transformar un problema de controles de crédito en uno de controles de ahorro, basta con hacer uso de la expresión:

$$\omega_s = -\omega_c$$

Optimización dinámica

Considérese el siguiente problema:

$$\begin{aligned}&\max\ V_{dyn}(S_X)\\&s.a.: R_{dyn}(S_X) \leq VA(S_T)\end{aligned}$$

Tal es un problema de optimización dinámica. Donde V_{dyn} corresponde al valor presente de una serie de valores de desempeño instantáneos, y R_{dyn} corresponde al valor presente de una serie de valores de requerimiento instantáneos. S_T denota la trayectoria de la disponibilidad de recursos asignables a los procesos de transformación instantáneos. Los valores presentes son alcanzados luego de que se integra los desempeños y requerimientos instantáneos actualizadas según un factor de actualización. El factor de actualización toma el valor d:

$$d < 1$$

Considérese la siguiente serie temporal:

$$S = \{s_1, s_2, ..., s_t, ..., s_Z\}$$

El valor actual de la serie es:

$$VA(S) = \sum_{t=1}^{t=Z} s_t \cdot d^{t-1}$$

Para la discusión que sigue, V_{dyn} será denotado simplemente como V, y R_{dyn} será denotado como R. De este modo, la optimización dinámica será expresada como:

$$\max \; V(S_X)$$
$$s.a.: R(S_X) \leq VA(S_T)$$

Dado que $R(S_X)$ es una función de costo, la función objetivo a ser optimizada tendrá que incluir la función de requerimientos con signo negativo, es decir que al valor $V(S_X)$ debe sumarse la expresión $-R(S_X)$. Como $R(S_X)$ y $V(S_X)$ están medidos en unidades diferentes, es necesario multiplicar a $R(S_X)$ por un factor de conversión, que denotaremos por ρ. Obtenemos así la siguiente expresión para el problema de optimización:

$$\max \; V(S_X) - \rho \cdot R(S_X)$$
$$s.a.: R(S_X) \leq VA(S_T)$$

La función objetivo a optimizar puede ser denotada como Λ(X), y tendríamos:

$$\Lambda(S_X) = V(X) - \rho \cdot R(X)$$

Con lo que nuestro problema de optimización toma la forma siguiente:

$$\max \; \Lambda(S_X)$$
$$s.a.: R(S_X) \leq VA(S_T)$$

Esta notación es la más adecuada, y podemos llamarla "notación de desempeño neto". Sin embargo, haremos uso de la notación original, que es más simple, durnate la presentación de las formalización del problema. Para resolver el problema, no obstante, será necesario recurrir a la notación de desempeño neto.

Trayectorias

Durante los Z períodos económicos, las trayectorias de X y T toman forma de series:

$$S_X = \{X_1, X_2, ..., X_t, ..., X_Z\}$$
$$S_T = \{T_1, T_2, ..., T_t, ..., T_Z\}$$

donde:

$$X = \sum_{t=1}^{t=Z} X_t$$
$$T = \sum_{t=1}^{t=Z} T_t$$

y denotamos esto como:

$$X = total(S_X)$$
$$T = total(S_T)$$

El valor actual de la serie S_T se determina de la siguiente forma:

$$VA(S_T) = \sum_{t=1}^{t=Z} T_t \cdot d^{t-1}$$

Definimos la función $VI(X_t)$ como la función instantánea de desempeño (en verdad es la velocidad de cambio de la función de desempeño corriente). $RI(X_t)$ es la función instantánea de requerimientos. Las trayectorias de las funciones VI y RI toman la forma:

$$S_{VI} = \{VI_1(X_1), VI_2(X_2), ..., VI_t(X_t), ..., VI_Z(X_Z)\}$$
$$S_{RI} = \{RI_1(X_1), RI_2(X_2), ..., RI_t(X_t), ..., RI_Z(X_Z)\}$$

Se verifican las siguientes relaciones:

$$V(S_X) = VA(S_{VI})$$
$$R(S_X) = VA(S_{RI})$$

que son equivalentes a:

$$V(S_X) = \sum_{t=1}^{t=Z} VI_t(X_t) \cdot d^{t-1}$$
$$R(S_X) = \sum_{t=1}^{t=Z} RI_t(X_t) \cdot d^{t-1}$$

Ahora podemos expresar la optimización dinámica como:

$$\max \sum_{t=1}^{t=Z} VI_t(X_t) \cdot d^{t-1}$$

s.a.:

$$\sum_{t=1}^{t=Z} RI_t(X_t) \cdot d^{t-1} \leq \sum_{t=1}^{t=Z} T_t \cdot d^{t-1}$$

Descuento psicológico y descuento financiero

Muchos textos trabajan con una variante de esta ecuación que podemos expresar de la forma que sigue:

$$\max \sum_{t=1}^{t=Z} VI_t(X_t) \cdot d_{psi}^{t-1}$$

s.a.:

$$\sum_{t=1}^{t=Z} RI_t(X_t) \cdot d_{fin}^{t-1} \leq \sum_{t=1}^{t=Z} T_t \cdot d_{fin}^{t-1}$$

donde el subíndice *psi* indica que una tasa de descuento psicológica, mientras que el subíndice *fin* indica que una tasa de descuento financiera. Tal tratamiento es interesante, dado que muestra que el descuento psicológico no tiene que coincidir siempre con el financiero. Haremos uso de este tratamiento en diversos modelos de optimización dinámica discreta.

El descuento financiero d_{fin} se relaciona con la tasa de interés promedio r del sistema financiero de la forma siguiente:

$$d_{fin} = \frac{1}{1+r}$$

El factor de capitlización de un período será denotado cap, donde:

$$cap = 1 + r$$

Una simplificación adicional

Haremos uso de la siguiente función de requerimientos instantáneos $RI_t(X_t)$:

$$RI_t(X_t) = X_t$$

y con esto, nuestro modelo queda como:

$$\max \sum_{t=1}^{t=Z} VI_t(X_t) \cdot d_{psi}^{t-1}$$

s.a.:

$$\sum_{t=1}^{t=Z} X_t \cdot d_{fin}^{t-1} \leq \sum_{t=1}^{t=Z} T_t \cdot d_{fin}^{t-1}$$

Economía de dos períodos

Este es un caso sencillo, y haremos uso de él para construir diversos modelos de optimización dinámica discreta. La expresión general de este modelo es:

$$\begin{aligned}&\max\ V(S_X)\\&s.a.: R(S_X) \leq VA(S_T)\end{aligned}$$

y la expresión particular es:

$$\begin{aligned}&\max\left(VI_1(X_1) + VI_2(X_2)\cdot d_{psi}\right)\\&\text{s.a.:}\\&X_1 + X_2 \cdot d_{fin} \leq T_1 + T_2 \cdot d_{fin}\end{aligned}$$

Antes de resolver este problema, puede ser útil imponer simplificaciones ilustrativas, a las que descartaremos luego. Estas simplificaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}&d_{psi} = 1\\&d_{fin} = 1\end{aligned}$$

Resultado de incorporar estas simplificaciones, el modelo aparece como:

$$\begin{aligned}&\max\left(VI_1(X_1) + VI_2(X_2)\right)\\&\text{s.a.:}\\&X_1 + X_2 \leq T_1 + T_2\end{aligned}$$

Ahora descompondremos este modelo en los siguientes problemas instantáneos:

$$\begin{aligned}&\max VI_1(X_1)\\&\text{s.a.:}\\&X_1 \leq T_1 + f_\omega(t_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max VI_2(X_2)\\&\text{s.a.:}\\&X_2 \leq T_2 + f_\omega(t_2)\end{aligned}$$

Recomponiendo el problema, tenemos:

$$\begin{aligned}&\max\left(VI_1(X_1) + VI_2(X_2)\right)\\&\text{s.a.:}\\&X_1 + X_2 \leq T_1 + T_2 + f_\omega(t_1) + f_\varpi(t_2)\end{aligned}$$

Comparando el modelo previo a la descomposición y el modelo recompuesto, encontramos que:

$$f_{\omega}(t_1)+f_{\omega}(t_2)=0$$

esto implica que:

$$f_{\omega}(t_2)=-f_{\omega}(t_1)$$

Una optimización con control de crédito

Si la función f_{ω} es un control de crédito, entonces el problema 1 se vuelve:

$$\begin{aligned}&\max VI_1(X_1)\\&\text{s.a.:}\\&X_1 \leq T_1+\omega_{c1}\end{aligned}$$

La interpretación de esta expresión es la siguiente: el agente económico puede cubrir requerimientos en un valor X_1 que esté por encima de sus recursos disponibles T_1. Si no dispusiera del crédito, el problema estaría restringido en forma más fuerte, siendo el siguiente:

$$\begin{aligned}&\max VI_1(X_1)\\&\text{s.a.:}\\&X_1 \leq T_1\end{aligned}$$

Como se ve, el control de crédito permite que se haga uso de requerimientos en monto mayor que en el caso en que no se dispone de ese control. La posibilidad de cubrir un mayor monto de requerimientos se traducirá en un mayor valor de X_1, que dará a su vez un mayor valor de la función de desempeño instantánea VI_1.

Una optimización con control de ahorro

Nuestro modelo con control de crédito puede ser reexpresado como un modelo con cntrol de ahorro. En tal sentido, podemos reescribir al modelo del primer período como:

$$\begin{aligned}&\max VI_1(X_1)\\&\text{s.a.:}\\&X_1 \leq T_1-\omega_{s1}\end{aligned}$$

Esto puede interpretarse como una situación en la que se hace uso de un control de ahorro para reducir las posibilidades de uso de recursos en el período 1. La finalidad de hacer esto es incrementar las posibilidades de uso de recursos en el período 2. En efecto, en el segundo período tendremos una disponibilidad de recursos más amplia:

$$\max VI_2(X_2)$$
s.a.:
$$X_2 \leq T_2 + \omega_{s1}$$

Reincorporación de los descuentos d_{psi}, d_{fin} <1

Considérese los siguientes problemas instantáneos:

$$\max VI_1(X_1)$$
s.a.:
$$X_1 \leq T_1 + f_\omega(t_1)$$

$$\max VI_2(X_2)$$
s.a.:
$$X_2 \leq T_2 + f_\omega(t_2)$$

Recordemos la expresión del problema original de optimización dinámica en dos tiempos:

$$\max\left(VI_1(X_1) + VI_2(X_2)\cdot d_{psi}\right)$$
s.a.:
$$X_1 + X_2 \cdot d_{fin} \leq T_1 + T_2 \cdot d_{fin}$$

Si deseamos recomponer la restricción de recursos disponibles en base a los dos componentes:

$$X_1 \leq T_1 + f_\omega(t_1)$$
$$X_2 \leq T_2 + f_\omega(t_2)$$

entonces necesitaremos multiplicar el segundo componente por el factor de descuento d_{fin}. La recomposición de las restricciones toma la forma de:

$$X_1 + X_2 \cdot d_{fin} \leq T_1 + T_2 \cdot d_{fin} + f_\omega(t_1) + f_\omega(t_2)\cdot d_{fin}$$

Comparando el modelo previo a la descomposición y el modelo recompuesto, encontramos que:

$$f_\omega(t_1) + f_\omega(t_2)\cdot d_{fin} = 0$$

esto implica que:

$$f_\omega(t_2) = -\frac{f_\omega(t_1)}{d_{fin}}$$

Los dos modelos serán, entonces:

$$\max VI_1(X_1)$$
s.a.:
$$X_1 \leq T_1 + f_\omega(t_1)$$

$$\max VI_2(X_2)$$
s.a.:
$$X_2 \leq T_2 - \frac{f_\omega(t_1)}{d_{fin}}$$

Si el control del primer período es de ahorro, debemos reexpresar los problemas instantáneos como:

$$\max VI_1(X_1)$$
s.a.:
$$X_1 \leq T_1 - \omega_{s1}$$

$$\max VI_2(X_2)$$
s.a.:
$$X_2 \leq T_2 + \frac{\omega_{s1}}{d_{fin}}$$

Recordando que d_{fin} es igual a la inversa de (1+r), donde r es la tasa de interés promedio del sistema financiero, tenemos que el segundo período puede ser expresado como:

$$\max VI_2(X_2)$$
s.a.:
$$X_2 \leq T_2 + \omega_{s1} \cdot (1 + r)$$

La restricción debe interpretarse de la manera que sigue: el ahorro del primer período incrementa la disponibilidad de recursos del segundo período, mediante la recuperación de monto ahorrado en el primer período, así como la incorporación del cobro de intereses sobre ese monto ahorrado.

Estandarización de la optimización en cada período

Vamos ahora a expresar a cada problema de optimización instantánea, de manera que pueda integrarse un control corriente de ahorro en cada uno y el cobro de ahorro e intereses resultante del control del período inmediato. Denotaremos al control de ahorro simplemente como ω. Las expresiones estandarizadas serán:

$$\max VI_1(X_1)$$
s.a.:

$$X_1 \leq T_1 + \omega_0 \cdot (1+r) - \omega_1$$

$$\max VI_2(X_2)$$
s.a.:
$$X_2 \leq T_2 + \omega_1 \cdot (1+r) - \omega_2$$

La expresión estandarizada será útil para el análisis de problemas de optimización de Z períodos. En estos problemas, la expresión estandarizada de problema del período t es:

$$\max VI_t(X_t)$$
s.a.:
$$X_t \leq T_t + \omega_{t-1} \cdot (1+r) - \omega_t$$

En las dos expresiones de nuestro problema dinámico tanto ω_0 como ω_2 tienen el valor de cero. La explicación es la siguiente: las operaciones económicas empiezan en el período 1, y por ello no existe un ahorro del período 0 que pudiera ser recuperado y a la vez aportar intereses en el período 1; por otro lado, el ahorro del período 2 es cero, dado que no se desea reservar recursos para un posterior período económico, pues en este problema no existe un período 3. El valor del ahorro (es decir, el control de ahorro) en el período Z, que es siempre el último del problema de optimización dinámica, es cero. Expresamos esto como:

$$\omega_Z = 0$$

Optimización en la economía de dos períodos con control de ahorro

Como sabemos, la expresión general del problema de optimización es:

$$\max \ V(S_X)$$
$$s.a.: R(S_X) \leq VA(S_T)$$

Será preferible usar la notación de desempeño neto:

$$\max \ \Lambda(S_X) = V(S_X) - \rho \cdot R(S_X)$$
$$s.a.: R(S_X) \leq VA(S_T)$$

o:

$$\max \Lambda(S_X) = \left[\left(VI_1(X_1) + VI_2(X_2) \cdot d_{psi} \right) - \left(X_1 + X_2 \cdot d_{fin} \right) \right]$$
s.a.:
$$X_1 + X_2 \cdot d_{fin} \leq T_1 + T_2 \cdot d_{fin}$$

El propósito de la optimización es saber qué valores de X_1 y X_2 permiten alcanzar máximo valor de desempeño durante el conjunto de los períodos económicos 1 y 2.

Condiciones de Primer Orden y Condición de la Asignación Óptima

Haremos uso de la convención siguiente: si la función de desempeño neto es "adecuadamente comportada", entonces las CPO (condiciones de primer orden) nos darán los criterios de optimización. Las CSO (condiciones de segundo orden) nos darán, asimismo, un valor negativo respecto a las variables de decisión.

Las CPO tienen la forma:

$$\frac{\partial \Lambda(S_X)}{\partial X_t} = 0$$

correspondiente a la expresión:

$$\frac{\partial V(S_X)}{\partial X_t} = \rho \cdot \frac{\partial R(S_X)}{\partial X_t}$$

que equivale a escribir:

$$\frac{\dfrac{\partial V(S_X)}{\partial X_t}}{\dfrac{\partial R(S_X)}{\partial X_t}} = \rho$$

Éste es el criterio de optimización. A la siguiente expresión la vamos a denominar la Condición de la Asignación Óptima, aplicada al problema de dos períodos:

$$\frac{\dfrac{\partial V(S_X)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial R(S_X)}{\partial X_1}} = \frac{\dfrac{\partial V(S_X)}{\partial X_2}}{\dfrac{\partial R(S_X)}{\partial X_2}} = \rho$$

Lo que estamos asignando en forma óptima es el nivel de la actividad económica X en cada período. Como sabemos que:

$$R(S_X) = X_1 + X_2 \cdot d_{fin}$$

La Condición de la Asignación Óptima se transforma en:

$$\frac{\dfrac{\partial V(S_X)}{\partial X_1}}{1} = \frac{\dfrac{\partial V(S_X)}{\partial X_2}}{d_{fin}} = \rho$$

lo que es equivalente a:

$$\frac{\partial VI_1(X_1)}{\partial X_1} = \frac{\partial VI_2(X_2)}{\partial X_2} \cdot \frac{d_{psi}}{d_{fin}} = \rho$$

de donde se puede obtener la siguiente ecuación:

$$\frac{\dfrac{\partial VI_1(X_1)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial VI_2(X_2)}{\partial X_2} \cdot d_{psi}} = \frac{1}{d_{fin}}$$

Condición de Tangencia y Vía de Expansión

Ahora construiremos la expresión de la pendiente de la función $V(S_X)$. Para ello recurriremos al Teorema de la Función Implícita. El Teorema de la Función Implícita indica que para una ecuación de tipo $H(X_1, X_2) = 0$, la derivada de la función H (que es la pendiente de la curva H en el plano X_1-X_2) puede ser hallada por la fórmula:

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{\dfrac{\partial H(X_1, X_2)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial H(X_1, X_2)}{\partial X_2}}$$

El valor obtenido es un escalar, es decir que tiene dimensión física cero, no está acompañado de ningún tipo de unidad de medida, pudiendo ser expresado en términos porcentuales. La pendiente de la curva de desempeño es evaluada para un valor constante de la función de desempeño, es decir que:

$$V(S_X) - V_0 = 0$$

La restricción de requerimientos muestra que la utilización de todos nuestros recursos disponibles, valorados según el criterio de descuento financiero, arroja la siguiente ecuación:

$$R(S_X) - VA(S_T) = 0$$

En ambos casos podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita para hallar la pendiente de las curvas de desempeño y de requerimientos que relacionan a X_2 con X_1, y hacemos los cálculos de la forma siguiente:

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{\dfrac{\partial V(S_X)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial V(S_X)}{\partial X_2}}$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{\dfrac{\partial R(S_X)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial R(S_X)}{\partial X_2}}$$

Estas ecuaciones se traducen en:

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{\dfrac{\partial VI_1(X_1)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial VI_2(X_2)}{\partial X_2} \cdot d_{psi}}$$

y

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{1}{d_{fin}}$$

respectivamente. Es fácil ver que las dos pendientes son iguales, por lo visto en el acápite anterior sobre la Condición de Asignación Óptima. De allí se deduce que la Condición de la Asignación Óptima es equivalente a la verificación de la tangencia entre las curvas que representan la función dinámica de desempeño y la función dinámica de requerimientos. Así, llamaremos Condición de Tangencia a la expresión:

$$\frac{\dfrac{\partial VI_1(X_1)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial VI_2(X_2)}{\partial X_2} \cdot d_{psi}} = \frac{1}{d_{fin}}$$

En el plano X_1-X_2, la condición de tangencia se traduce en un *locus* (lugar geométrico) llamado la Vía de Expansión. Cada punto de la vía de expansión representa una combinación óptima del volumen de la actividad económica en los períodos 1 y 2, respecto a un valor actualizado de los recursos disponibles que empieza en cero y avanza hasta infinito.

Sistema de dos ecuaciones simultáneas y solución del problema de dos períodos

Para la solución del problema de optimización dinámica de dos períodos disponemos de dos ecuaciones, con las que formaremos un sistema de ecuaciones simultáneas. Las incógnitas son X_1 y X_2, mientras que el sistema de ecuaciones simultáneas consiste en el conjunto de las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{\dfrac{\partial VI_1(X_1)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial VI_2(X_2)}{\partial X_2}\cdot d_{psi}} = \frac{1}{d_{fin}} \qquad \text{(Vía de Expansión)}$$

$$R(S_X) = VA(S_T) \qquad \text{(Límite de disponibilidad actualizada de recursos)}$$

La solución del sistema se denota S_{X^*} y es la combinación optimizadora, es decir, la combinación de los niveles de actividad que optimizan el valor de desempeño neto en esta economía.

Para el caso del problema con control de ahorro, el sistema de ecuaciones simultáneas es:

$$\frac{\dfrac{\partial VI_1(X_1)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial VI_2(X_2)}{\partial X_2}\cdot d_{psi}} = \frac{1}{d_{fin}}$$

$$X_1 + X_2 \cdot d_{fin} = T_1 + T_2 \cdot d_{fin}$$

Numerosos problemas de optimización dinámica discreta en dos períodos con control de ahorro tienen su solución de asignación de los niveles de actividad en la solución del sistema mostrado.

La trayectoria del control

La solución del problema de optimización dinámica incluye también una expresión para el control. Esta expresión sería del tipo:

$$\omega_t = \omega(t)$$

Se genera una trayectoria del tipo:

$$S_\omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_t, ..., \omega_Z\}$$

Para este caso del ahorro en dos tiempos:

$$S_\omega = \{\omega_1, \omega_2 = 0\}$$

La forma de controlar el proceso es actuar según lo indica el control. En este caso, lo indicado es ahorrar un monto ω_1 en el período 1 y no ahorrar nada en el período 2.

Un ejemplo de control de ahorro en dos tiempos

Sea el siguiente caso:

$$\max \Lambda(S_X) = \left[\left(VI_1(X_1) + VI_2(X_2)\cdot d_{psi}\right) - \left(X_1 + X_2 \cdot d_{fin}\right)\right]$$

s.a.:

$$X_1 + X_2 \cdot d_{fin} \leq T_1 + T_2 \cdot d_{fin}$$

con $VI_t(X_t) = \ln X_t$. Se requiere encontrar S_{X^*} y S_ω. El sistema de ecuaciones simultáneas correspondientes será:

$$\frac{\dfrac{1}{X_1}}{\dfrac{1}{X_2}\cdot d_{psi}} = \frac{1}{d_{fin}}$$

$$X_1 + X_2 \cdot d_{fin} = T_1 + T_2 \cdot d_{fin}$$

La vía de expansión toma la forma de la ecuación de una línea recta con pendiente positiva y que pasa por el origen del sistema de coordenadas:

$$X_2 = X_1 \cdot \frac{d_{psi}}{d_{fin}}$$

Puede comprobarse que la combinación óptima de asignación de la actividad económica es:

$$S_{X^*} = \left\{\frac{T_1 + T_2 \cdot d_{fin}}{1 + d_{psi}}, \frac{T_1 + T_2 \cdot d_{fin}}{1 + d_{psi}} \cdot \frac{d_{psi}}{d_{fin}}\right\}$$

La trayectoria del control óptimo es:

$$S_\omega = \left\{\frac{d_{psi}}{1 + d_{psi}} \cdot T_1 - \frac{d_{fin}}{1 + d_{psi}} \cdot T_2, 0\right\}$$

Como sabemos, d_{fin} es la inversa de la expresión (1+r). Entonces, el control de ahorro puede ser expresado como:

$$\omega_1 = \frac{d_{psi}}{1 + d_{psi}} \cdot T_1 - \frac{1}{\left(1 + d_{psi}\right)\cdot\left(1 + r\right)} \cdot T_2$$

La trayectoria mostrada es la deseada. Sin embargo, para que esta trayectoria pueda volverse efectiva, se requiere interactuar con un agente que provea los servicios financieros de ahorro y crédito que ofrezca estos servicios a una tasa de interés predeterminada r. Puede suceder que no esté presente tal agente, con lo que la economía no podrá realizar el ahorro deseado.

Descripción de la forma del control de ahorro en el ejemplo

Queda claro que ω es una función que depende directamente de la tasa de interés, es decir que:

$$\omega = f\left(\overset{+}{r}\right)$$

Definimos la tasa de interés de equilibrio r_e como aquélla en la que el ahorro es nulo. El cálculo muestra que:

$$r_e = \frac{T_2}{T_1 \cdot d_{psi}} - 1$$

Puede verse que:

$$r_e = f\left(\overset{-}{T_1}, \overset{+}{T_2}, \overset{-}{d}_{psi}\right)$$

Lo que nos dice esta expresión es que mientras más dinero se tenga hoy, menor será la tasa de interés necesaria para motivarnos a llevar nuestro dinero al banco (paralelamente, estaremos dispuestos a pagar una tasa más alta por el crédito tomado); mientras más dinero se tenga mañana, mayor será la tasa de interés necesaria para motivarnos a llevar nuestro dinero al banco (paralelamente, exigiremos una tasa de interés menor para tomar crédito); mientras mayor sea nuestra preferencia por el presente (y menor el factor d_{psi} que afecta a la satisfacción futura), mayor será la tasa de interés requerida para motivarnos a llevar nuestro dinero al banco. Respecto a este último término, si nuestra preferencia por el futuro es mayor (e igualmente mayor el factor d_{psi}), menor será la tasa de interés requerida para motivarnos a llevar nuestro dinero al banco.

Una interpretación del concepto de tasa de interés de equilibrio r_e puede verse en en lo siguiente: Cuando una economía enfrenta una tasa superior a r_e, el agente económico considera que la tasa es alta, y se decide a ahorrar, ya que el sistema financiero permite que sus ingresos se incrementen en el futuro a gusto de él. Pero si la tasa de interés enfrentada es menor que r_e, el agente económico considerará que la tasa es baja, por lo que preferirá tomar dinero prestado. En este segundo caso, el valor del control de ahorro se hace negativo, por lo que el control se convierte en uno de crédito.

Pero, como ya se dijo antes, es menester que exista un agente financiero dispuesto a ofrecer los servicios de ahorro y crédito para que el control pueda toma r la adecuada forma de ahorro o crédito. El papel de agente financiero puede ser desempeñado por una institución financiera o por otra economía. En el primer caso, el agente presenta tasa de interés r que afectará a ahorros y créditos. En el segundo caso, la interacción de las dos economías determinará el monto de la tasa de interés de equilibrio de mercado, definiendo la cualidad de ahorrista o prestatario de cada economía. Naturalmente, el mercado de dos economías permitirá que sólo una sea ahorrista y que la otra sea la única prestataria.

Flujo de ahorro y crédito entre dos economías

Cuando dos economías desean, cada una, realizar ahorro o tomar crédito en el primer tiempo, pero no existe en ningún proveedor de servicios financieros de ahorro y crédito, ninguna de las dos economías podrá realizar ahorro en el monto deseado en forma individual. Pero si las dos economías interactúan, una puede depositar dinero en un período, en tanto que la otra toma el fondo financiero correspondiente en préstamo. Dado que ambas poseen curvas de reacción en términos de ahorro que responden a inifinitos valores de la tasa de interés, queda claro que la interacción de las dos economías debe determinar una tasa de interés de equilibrio de mercado financiero.

Así pues, una de las dos economías ahorra y la otra toma crédito. La primera economía usa control de ahorro y la otra toma control de crédito. Como ya sabemos, el control de crédito es equivalente a un control de ahorro con valor negativo. Ambos son controles financieros, y serán denominados controles de reserva financiera o cuentas bancarias. Hablaremos de ahorro cuando tengamos un control de reserva financiera o cuenta bancaria de valor positivo y de crédito cuando tengamos un control de reserva financiera o cuenta bancaria de valor negativo.

Las intenciones de cuenta financiera de dos economías A y B vienen dadas por las funciones:

$$\omega_{A1} = \frac{d_{psiA}}{1+d_{psiA}} \cdot T_{A1} - \frac{1}{(1+d_{psiA})\cdot(1+r)} \cdot T_{A2}$$

$$\omega_{B1} = \frac{d_{psiB}}{1+d_{psiB}} \cdot T_{B1} - \frac{1}{(1+d_{psiB})\cdot(1+r)} \cdot T_{B2}$$

La suma de las dos cuentas bancarias tiene que ser nula (una economía presta mientras que la otra toma el dinero en préstamo:

$$\omega_{A1} + \omega_{B1} = 0$$

Cada economía posee una tasa de interés de equilibrio doméstico r_e. Ambas tasas de equilibrio doméstico vienen dadas por:

$$r_{eA} = \frac{T_{A2}}{T_{A1} \cdot d_{psiA}} - 1$$

$$r_{eB} = \frac{T_{B2}}{T_{B1} \cdot d_{psiB}} - 1$$

La diferencia entre las tasas de interés de equilibrio doméstico es:

$$r_{eA} - r_{eB} = \frac{T_{A2}}{T_{A1} \cdot d_{psiA}} - \frac{T_{B2}}{T_{B1} \cdot d_{psiB}}$$

Puede comprobarse que si la diferencia de tasas de interés es positiva, entonces la economía A toma dinero en préstamo de B y si la diferencia de tasas de interés es negativa, será B quien tome dinero en préstamo de A. La tasa de interés de equilibrio del mercado financiero, es decir, la tasa a la que se negocia el préstamo, viene determinada por:

$$r_m = \frac{\dfrac{T_{A2}}{1 + d_{psiA}} - \dfrac{T_{B2}}{1 + d_{psiB}}}{\dfrac{T_{A1} \cdot d_{psiA}}{1 + d_{psiA}} - \dfrac{T_{B1} \cdot d_{psiB}}{1 + d_{psiB}}} - 1$$

Los montos de ahorro-crédito serán los siguientes:

$$\omega_{A1} = \frac{d_{psiA}}{1 + d_{psiA}} \cdot T_{A1} - \frac{1}{\left(1 + d_{psiA}\right) \cdot \left(1 + r_m\right)} \cdot T_{A2}$$

$$\omega_{B1} = \frac{d_{psiB}}{1 + d_{psiB}} \cdot T_{B1} - \frac{1}{\left(1 + d_{psiB}\right) \cdot \left(1 + r_m\right)} \cdot T_{B2}$$

Como se está evaluando el control de ahorro, el valor de este control será positivo para una economía (la que ofrece dinero en préstamo) y negativo para la otra (la que toma dinero en préstamo).

Una optimización con producción y control de inversión

En una economía en la que hay producción, el consumo depende de monto producido en cada período. El control de inversión reduce el monto consumido en el período, pero genera la posibilidad de incrementar el volumen producido de un período posterior. Si suponemos que los activos para la producción pueden ser vendidos en liquidación al final del período, esto incrementa las posibilidades de consumo, ya que el dinero obtenido por la venta de maquinaria podrá ser utilizado para comprar productos terminados en el mercado internacional. Podemos también suponer que la maquinaria sufre un proceso de depreciación que reduce su valor en forma periódica. Expresamos todo esto en el siguiente sistema matemático:

$$\max VI_1\left(X_1\right)$$
s.a.:
$$X_1 \leq Q\left(T_1\right) - \omega_1$$

$$\max VI_2\left(X_2\right)$$
s.a.:
$$X_2 \leq Q\left(L_2\right) + L_2 \cdot d_{dep} \cdot d_{liq}$$

$$L_2 = T_2 + L_1 \cdot d_{dep} + \omega_1$$

Donde $Q(L_t)$ es la función de producción, L_t es el monto usado de factores de producción en t, T_t es la disponibilidad espontánea de factores de producción en t, d_{dep} es el factor periódico de depreciación y dep es la tasa de depreciación:

$$d_{dep} = 1 - dep$$

Por ejemplo si dep=20%, entonces d_{dep}=80%, con lo que el activo vale sólo 80% del valor original. d_{liq} es el es el valor porcentual de liquidación de los activos para la producción y liq es el descuento porcentual del precio en la liquidación:

$$d_{dep} = 1 - dep$$

Por ejemplo si liq=20%, entonces d_{liq}=80%, con lo que el activo, en el momento de ser liquidado, vale sólo 80% del valor original.

Finalmente, ω_t es el control de inversión. El problema de optimización dinámica es:

$$\max V(S_X)$$
s.a.:
$$X_1 + X_2 \cdot d_{fin} \le (Q(L_1) - \omega_1) + (Q(L_2) + L_2 \cdot d_{dep} \cdot d_{liq}) \cdot d_{fin}$$
$$\omega_1 = Q(L_1) - X_1$$
$$L_1 = T_1$$
$$L_2 = T_2 + L_1 \cdot d_{dep} + \omega_1$$

Reescribimos el problema:

$$\max V(S_X)$$
s.a.:
$$X_1 + X_2 \cdot d_{fin} \le X_1 + (Q(L_2) + L_2 \cdot d_{dep} \cdot d_{liq}) \cdot d_{fin}$$
$$L_2 = T_2 + T_1 \cdot d_{dep} + (Q(T_1) - X_1)$$

Vemos con claridad que L_2 es una función de X_1. Expresamos esto de la siguiente forma:

$$L_2 = L_2(X_1) = -X_1 + T_1 \cdot d_{dep} + Q(T_1) + T_2$$

Reescribimos nuevamente el problema:

$$\max V(S_X)$$
s.a.:
$$X_2 \le Q(L_2(X_1)) + L_2(X_1) \cdot d_{dep} \cdot d_{liq}$$

$$L_2(X_1) = -X_1 + T_1 \cdot d_{dep} + Q(T_1) + T_2$$

Ahora definimos la función de frontera tecnológica dinámica de la economía:

$$FTE(S_X) = -L_2(X_1) \cdot d_{dep} \cdot d_{liq} - Q(L_2(X_1)) + X_2$$

Reescribimos nuevamente el problema:

$$\begin{aligned} &\max V(S_X) \\ &\text{s.a.:} \\ &FTE(S_X) \leq 0 \end{aligned}$$

En una función adecuadamente comportada se llega a la utilización de todo el recurso. Por lo tanto, allí se cumple:

$$FTE(S_X) = 0$$

Por el Teorema de la Función Implícita, la derivada de la función FTE (que es la pendiente de la curva FTE en el plano X1-X2) puede ser hallada por la fórmula:

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{\dfrac{\partial FTE(S_X)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial FTE(S_X)}{\partial X_2}}$$

El valor obtenido es un escalar, es decir que tiene dimensión física cero, no está acompañado de ningún tipo de unidad de medida, pudiendo ser expresado en términos porcentuales. Podemos obtener las derivadas de FTE respecto a X_1 y X_2. Éstas son:

$$\frac{\partial FTE(S_X)}{\partial X_1} = -\frac{\partial L_2}{\partial X_1} \cdot d_{dep} \cdot d_{liq} - \frac{\partial Q}{\partial L_2} \cdot \frac{\partial L_2}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial FTE(S_X)}{\partial X_1} = 1$$

Como la derivada de L_2 respecto a X_1 es –1, tenemos que la pendiente de la curva FTE será igual a:

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\left(-(-1) \cdot d_{dep} \cdot d_{liq} - \frac{\partial Q}{\partial L_2} \cdot (-1) \right)$$

Como d_{dep}=1-dep y d_{liq}=1-liq, tenemos:

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{\partial Q}{\partial L_2} - (1 - dep) \cdot (1 - liq)$$

Si el activo para la producción se deprecia totalmente (dep=1) o si pierde todo valor comercial (liq=1), tenemos:

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{\partial Q}{\partial L_2}$$

Pero si el activo no se deprecia (dep=0) ni pierde valor comercial (liq=0), tenemos:

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{\partial Q}{\partial L_2} - 1$$

Sabemos que la pendiente de la función de desempeño es:

$$\frac{\partial X_2}{\partial X_1} = -\frac{\dfrac{\partial VI_1(X_1)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial VI_2(X_2)}{\partial X_2} \cdot d_{psi}}$$

Bastará con formular la condición de tangencia para crear la vía de expansión. El cruce de la vía de expansión con la frontera tecnológica de la economía generará el punto S_X que optimiza el desempeño dinámico de la economía.

Sin embargo, ¿podemos formular la condición de tangencia en este caso?

En el problema del ahorro, bastó con construir una función de desempeño neto $\Lambda(S_X)$, la cual restaba el costo en requerimientos $R(S_X)$ al desempeño bruto original $V(S_X)$. En tal caso, si la función era adecuadamente comportada, se cumplía lo siguiente:

$$\frac{\partial V(S_X)}{\partial X_1} = \rho \cdot \frac{\partial R(S_X)}{\partial X_1}$$
$$\frac{\partial V(S_X)}{\partial X_2} = \rho \cdot \frac{\partial R(S_X)}{\partial X_2}$$

y, consecuentemente:

$$\frac{\dfrac{\partial V(S_X)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial R(S_X)}{\partial X_1}} = \frac{\dfrac{\partial V(S_X)}{\partial X_2}}{\dfrac{\partial R(S_X)}{\partial X_2}} = \rho$$

No es posible realizar tal análisis en este caso, dado que hemos descartado el uso de la función de requerimientos R, habiendo sustituido a ésta por la función de frontera tecnológica de la economía FTE.

Solución del problema de inversión mediante el uso del operador de Lagrange

Sabemos que nuestro problema ahora es:

$$\max V(S_X)$$
$$\text{s.a.:}$$
$$FTE(S_X) \leq 0$$

Este tipo de problema es resuelto por la técnica de optimización de Lagrange, creada por el matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Se requiere primero construir el operador de optimización de Lagrange, al que denotaremos por Lg:

$$Lg(S_X) = V(S_X) - \lambda \cdot (FTE(S_X) - FTE_0)$$

donde FTE_0 representa el valor limitante en la restricción de la función FTE. En este caso, FTE_0 es igual a cero. Así, tenemos:

$$Lg(S_X) = V(S_X) - \lambda \cdot FTE(S_X)$$

El término λ (lambda minúscula) recibe el nombre de Multiplicador de Lagrange. Para una función adecuadamente comportada, la aplicación de las condiciones de primer orden permite obtener las condiciones que debe cumplir la combinación S_X optimizadora. Las CPO son:

$$\frac{\partial Lg(S_X)}{\partial X_1} = 0$$
$$\frac{\partial Lg(S_X)}{\partial X_1} = 0$$

Lo que equivale a escribir:

$$\frac{\dfrac{\partial V(S_X)}{\partial X_1}}{\dfrac{\partial FTE(S_X)}{\partial X_1}} = \lambda$$
$$\frac{\dfrac{\partial V(S_X)}{\partial X_2}}{\dfrac{\partial FTE(S_X)}{\partial X_2}} = \lambda$$

Surge el Criterio de la Asignación Óptima:

$$\frac{\frac{\partial V(S_X)}{\partial X_1}}{\frac{\partial FTE(S_X)}{\partial X_1}} = \frac{\frac{\partial V(S_X)}{\partial X_2}}{\frac{\partial FTE(S_X)}{\partial X_2}} = \lambda$$

Que equivale a decir que:

$$\frac{\frac{\partial V(S_X)}{\partial X_1}}{\frac{\partial V(S_X)}{\partial X_2}} = \frac{\frac{\partial FTE(S_X)}{\partial X_1}}{\frac{\partial FTE(S_X)}{\partial X_2}}$$

quedando así formulada nuestra condición de tangencia. Reemplazando estas expresiones por las fórmulas que las definen, tenemos:

$$\frac{\frac{\partial VI_1(X_1)}{\partial X_1}}{\frac{\partial VI_2(X_2)}{\partial X_2}\cdot d_{psi}} = \frac{\partial Q}{\partial L_2} + (1-dep)\cdot(1-liq)$$

y ésta es la expresión final de nuestra condición de tangencia. El sistema de ecuaciones que resuelve el problema de optimización es el siguiente:

$$\frac{\frac{\partial VI_1(X_1)}{\partial X_1}}{\frac{\partial VI_2(X_2)}{\partial X_2}\cdot d_{psi}} = \frac{\partial Q}{\partial L_2} + (1-dep)\cdot(1-liq)$$

$$-L_2(X_1)\cdot(1-dep)\cdot(1-liq) - Q(L_2(X_1)) + X_2 = 0$$

donde, como ya sabemos:

$$L_2(X_1) = -X_1 + T_1\cdot(1-dep) + Q(T_1) + T_2$$

Si la depreciación y el descuento por liquidación son del 100%, tenemos:

$$\frac{\frac{\partial VI_1(X_1)}{\partial X_1}}{\frac{\partial VI_2(X_2)}{\partial X_2}\cdot d_{psi}} = \frac{\partial Q}{\partial L_2}$$

$$X_2 = Q(-X_1 + Q(T_1) + T_2)$$

Un ejemplo de control de inversión en dos tiempos

Sea el problema

$$\begin{aligned}&\max V(S_X)\\ &\text{s.a.:}\\ &X_2 \leq Q(-X_1 + Q(T_1) + T_2)\end{aligned}$$

Con $Q(L_t) = L_t^{\frac{1}{2}}$ y $VI_t(X_t) = \ln X_t$. Se requiere encontrar S_{X*} y S_ω. El sistema de ecuaciones simultáneas correspondientes será:

$$\frac{\frac{1}{X_1}}{\frac{1}{X_2}\cdot d_{psi}} = \frac{1}{2\cdot\left(-X_1 + T_1^{\frac{1}{2}} + T_2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$X_2 = \left(-X_1 + T_1^{\frac{1}{2}} + T_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

El sistema puede ser reescrito como:

$$\frac{X_2^2}{X_1^2} = \frac{d_{psi}^2}{4\cdot\left(-X_1 + T_1^{\frac{1}{2}} + T_2\right)}$$

$$X_2^2 = \left(-X_1 + T_1^{\frac{1}{2}} + T_2\right)$$

La combinación óptima de asignación de la actividad económica es:

$$S_{X*} = \left\{\frac{T_1^{\frac{1}{2}} + T_2}{1 + \frac{d_{psi}}{2}}, \left(\left(T_1^{\frac{1}{2}} + T_2\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{d_{psi}}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

La trayectoria del control óptimo es:

$$S_{\omega} = \left\{ T_1^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{d_{psi}}{2}} \right) - \frac{T_2}{1 + \frac{d_{psi}}{2}}, 0 \right\}$$

Un ejemplo de control financiero de ahorro-crédito y control de inversión

Sea el problema

$$\begin{aligned}
&\max VI_1(X_1) \\
&\text{s.a.:} \\
&X_1 \leq Q(L_1) - \omega_{s1} - \omega_{n1} \\
&L_1 = T_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\max VI_2(X_2) \\
&\text{s.a.:} \\
&X_2 \leq Q(L_2) + L_2 \cdot d_{dep} \cdot d_{liq} + \omega_{s1} \cdot (cap) \\
&L_2 = T_2 + T_1 \cdot d_{dep} + \omega_{n1}
\end{aligned}$$

Donde cap representa el factor de capitalización, y es igual a (1+r), o sea, a la inversa de d_{fin}. Si el problema está adecuadamente comportado, entonces su forma dinámica puede ser sintetizada como:

$$\begin{aligned}
&\max V\left(X_1(\omega_{s1}, \omega_{n1}), X_2(\omega_{s1}, \omega_{n1})\right) \\
&\text{donde:} \\
&X_1(\omega_{s1}, \omega_{n1}) = Q(T_1) - (\omega_{s1} + \omega_{n1}) \\
&X_2(\omega_{s1}, \omega_{n1}) = Q(T_2 + T_1 \cdot d_{dep} + \omega_{n1}) + (T_2 + T_1 \cdot d_{dep} + \omega_{n1}) \cdot d_{dep} \cdot d_{liq} + \omega_{s1} \cdot (cap)
\end{aligned}$$

Hemos transformado una optimización restringida en una optimización sin restricciones. Las variables de decisión de este problema ya no son X_1 y X_2, sino ω_{s1} y ω_{n1}, es decir, los controles de ahorro-crédito e inversión.

Este problema se resuelve mediante las CPO, a saber:

$$\frac{\partial V\left(X_1(\omega_{s1}, \omega_{n1}), X_2(\omega_{s1}, \omega_{n1})\right)}{\partial \omega_{s1}} = 0$$

$$\frac{\partial V\left(X_1(\omega_{s1}, \omega_{n1}), X_2(\omega_{s1}, \omega_{n1})\right)}{\partial \omega_{n1}} = 0$$

Si suponemos además que todo se deprecia y que el descuento por liquidación es total, tenemos que el problema se convierte en:

$$\max V\left(X_1(\omega_{s1}, \omega_{n1}), X_2(\omega_{s1}, \omega_{n1})\right)$$

donde:

$$X_1(\omega_{s1},\omega_{n1}) = Q(T_1) - (\omega_{s1} + \omega_{n1})$$

$$X_2(\omega_{s1},\omega_{n1}) = Q(T_2 + \omega_{n1}) + \omega_{s1} \cdot (cap)$$